Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
акад. Л. Д. ЛАНДАУ

ТОМ ЧЕТВЁРТЫЙ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ИЗДАНИЕ 2-е ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

13-5-2

Редактор *К. П. Гуров.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Подписано к печати 7/VII—1948 г. 22,75 печ. л. 27,58 уч.-изд. л. 48 500 тип. зн. в печ. листе.
А-01871. Тираж 15 000. экз. Цена книги 10 р. Переплёт 1 р. Заказ № 3433.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью настоящей книги является систематическое изложение теории электромагнитного и гравитационного полей.

Полная, логически связная теория электромагнитного поля включает в себя специальную теорию относительности. Поэтому мы взяли последнюю в качестве основы изложения. За исходный пункт для вывода основных соотношений берутся вариационные принципы, дающие возможность достигнуть наибольшей общности, единства и, по существу, простоты изложения.

Соответственно общему плану нашего Курса теоретической физики (частью которого является эта книга) мы не касаемся вовсе вопросов электродинамики сплошных сред, ограничиваясь изложением микроскопической электродинамики — электродинамики вакуума и точечных зарядов.

Последние две главы книги посвящены изложению теории гравитационных полей, т. е. общей теории относительности. При этом, как обычно, не предполагается предварительного знания читателем тензорного анализа, который излагается параллельно с развитием теории.

Мы не касаемся в книге попыток построения так называемых «единых» теорий электромагнитного и гравитационного полей, поскольку они, как нам кажется, не привели ни к каким положительным результатам.

Настоящее — второе — издание сильно переработано по сравнению с первым, вышедшим в 1941 г. В особенности значительны дополнения в главах об излучении электромагнитных волн, в которых подробно рассмотрен ряд конкретных задач.

С целью сохранения преемственности с ранее вышедшими томами Курса теоретической физики мы сохранили на этой книге прежний — четвёртый — номер. Мы хотели бы, однако, отметить, что за десять лет, прошедших с момента выхода первой книги, взгляды авторов на порядок расположения отдельных частей Курса претерпели некоторые изменения. В частности, мы пришли к выводу, что изложение классической статистики отдельно от квантовой по многим причинам нецелесообразно. Объединение же классической и квантовой статистик в одном томе требует перестановки также и других разделов

Поэтому вместо ранее принятого расположения томов (механика, статистика, механика сплошных сред, теория поля, квантовая механика, макроскопическая электродинамика) целесообразнее был бы следующий порядок:

1. Механика.
2. Теория поля.
3. Квантовая механика.
4. Статистическая физика.
5. Механика сплошных сред.
6. Макроскопическая электродинамика.
7. Физическая кинетика.

Институт физических проблем АН СССР
Москва, июнь 1947 г.

Л. Ландау,
Е. Лифшиц

ГЛАВА I

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Скорость распространения взаимодействий

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчёта. Под системой отсчёта понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Существуют системы отсчёта, в которых свободное движение тел, т. е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью. Такие системы отсчёта носят название инерциальных.

Если две системы отсчёта движутся друг относительно друга равномерно поступательно и если одна из них инерциальная, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной (всякое свободное движение и в этой системе будет прямолинейным и равномерным). Таким образом, имеется сколько угодно инерциальных систем отсчёта, движущихся друг относительно друга равномерно-поступательно.

Опыт показывает, что имеет место так называемый принцип относительности. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах отсчёта, имеет один и тот же вид.

Взаимодействие материальных частиц описывается в обычной механике посредством потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Легко видеть, что этот способ описания взаимодействий включает в себя предположение о мгновенности распространения взаимодействий. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны остальных частиц, в каждый момент зависят, при таком описании, только от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключает в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Разделив расстояние между обоими телами на этот промежуток времени, мы найдём «скорость распространения взаимодействий».

Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть максимальной скоростью распространения взаимодействий. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого изменение, происходящее с одним телом, начинает проявляться на другом. Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой. Действительно, если бы такое движение могло происходить, то посредством него можно было бы осуществить взаимодействие со скоростью, превышающей наибольшую возможную скорость распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой, часто говорят как о «сигнале», отправляющемся от первой частицы и «дающем знать» второй об изменении, которое испытала первая. О скорости распространения взаимодействий говорят тогда как о «скорости сигнала».

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчёта. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной.

Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому её называют скоростью света. Она обозначается обычно буквой c, а её численное значение, согласно последним измерениям, равно

$$c = 2{,}99776 \cdot 10^{10}\ \textit{см/сек}. \qquad (1{,}1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что в практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика. Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько малы по сравнению со скоростью света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется принципом относительности Эйнштейна (он был сформулирован Эйнштейном в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется релятивистской. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействий; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведён как переход к пределу $c \to \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике пространство относительно, т. е. пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчёта они описываются. Утверждение, что два разновременных события происходят в одном и том же месте пространства или вообще на определённом расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчёта это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются не зависящими от системы отсчёта — время одно для всех систем отсчёта. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчёта.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчёта, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Именно, измерения, произведённые впервые Майкельсоном (в 1881 г.), обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем как согласно классической механике скорость света в направлении движения земли должна была бы быть меньше, чем в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течёт по-разному в разных системах отсчёта. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошёл определённый промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчёта это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчёта, будут не одновременными в другой системе.

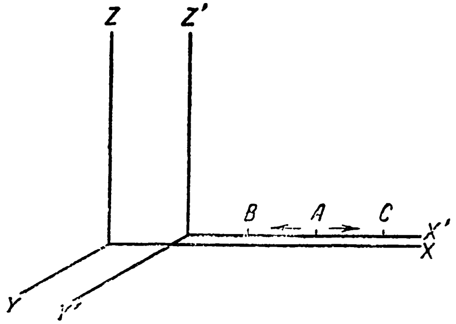

Рис. 1.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример. Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта K и K' с осями координат соответственно XYZ и $X'Y'Z'$, причём система K' движется относительно K вправо вдоль осей X и X' (рис. 1).

Пусть из некоторой точки A на оси X' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K', как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c, то сигналы достигнут равноудалённых от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K'). Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K. Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c, и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в неё сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придёт в точку B раньше, чем в точку C.

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит весьма глубокие и фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближёнными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

§ 2. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием события. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.

Часто полезно из соображений наглядности пользоваться фиктивным четырёхмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются «мировыми точками». Всякой частице соответствует некоторая линия («мировая линия») в этом фиктивном четырёхмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Легко сообразить, что равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчёта K и K', движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси X и X' совпадали, а оси Y и Z были параллельны осям Y' и Z'; время в системах K и K' обозначим через t и t'.

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе K в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы K распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Сигнал распространяется со скоростью c; пройдённое им расстояние равно поэтому $c(t_2-t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \quad (2,1)$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы K'.

Пусть координаты первого события в системе K' суть x'_1, y'_1, z'_1, t'_1, а второго: x'_2, y'_2, z'_2, t'_2. Согласно принципу инвариантности скорости света эта скорость в системах K и K' одинакова и потому, аналогично (2,1), мы имеем:

$$(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2-c^2(t'_2-t'_1)^2=0. \quad (2,2)$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 суть координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \quad (2,3)$$

называется интервалом между этими двумя событиями.

Таким образом, из принципа инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчёта, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то интервал ds между ними

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 + dy^2 - dz^2. \qquad (2,4)$$

В целях математического удобства, а именно для того, чтобы придать формулам более симметричный вид, мы будем в дальнейшем часто пользоваться вместо времени t другой переменной τ, связанной с t посредством соотношения:

$$\tau = ict. \qquad (2,5)$$

Тогда

$$s_{12}^2 = -[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(\tau_2-\tau_1)^2], \qquad (2,6)$$

$$ds^2 = -(dx^2+dy^2+dz^2+d\tau^2). \qquad (2,7)$$

Соответственно этому и на осях координат в нашем фиктивном четырёхмерном пространстве мы будем откладывать теперь не x, y, z, t, а x, y, z, τ. Как легко видеть, $-s_{12}^2$ можно истолковать тогда как квадрат расстояния между точками x_1, y_1, z_1, τ_1 и x_2, y_2, z_2, τ_2 в этом пространстве, а $-ds^2$ — как квадрат элемента длины[1]).

Как было выше показано, если $ds=0$ в некоторой инерциальной системе отсчёта, то $ds'=0$ и в другой системе. С другой стороны, ds и ds' — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что ds и ds' должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds = a\,ds',$$

причём коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства. Поэтому с тем же правом, как мы пишем $ds=a\,ds'$, мы можем написать и

$$ds' = a\,ds,$$

так как, конечно, скорости движения первой системы относительно второй, и наоборот, одинаковы. Подставляя $ds=a\,ds'$ в $ds'=a\,ds$, находим, что $a^2=1$, т. е. $a=\pm 1$. Для того чтобы выбрать одно из этих значений, заметим, что a может быть равно только или всегда $+1$ или всегда -1. Действительно, если бы $a(v)$ было для некоторых скоростей равным $+1$, для других -1, то для некоторых оно должно было бы иметь значения, промежуточные между $+1$ и -1,

[1]) Четырёхмерная геометрия, определяющаяся квадратичной формой (2,4) или (2.7), была введена, в связи с теорией относительности, Минковским.

что невозможно. Но если так, то a должно быть всегда равно $+1$, так как частным случаем преобразования $ds' = a\,ds$ является тождество $ds \equiv ds$, где $a = +1$. Из $ds' = ds$ непосредственно следует, что и для конечных интервалов $s' = s$.

Таким образом, мы приходим к весьма важному результату: интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчёта, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчёта к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять x_1, y_1, z_1, t_1, и x_2, y_2, z_2, t_2 суть координаты двух событий в некоторой системе отсчёта K'. Спрашивается, существует ли такая система отсчёта K', в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введём обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда интервал между событиями в системе K:

$$s^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

причём в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l_{12}' = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчёта с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$, т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют времениподобными.

Таким образом, если интервал между двумя событиями времениподобный, то существует такая система отсчёта, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдёт между этими событиями в этой системе, равно

$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2,8}$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12}, так как скорость тела не может быть больше c. Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчёта, в которой два события произошли бы в одно и то же время. Попрежнему мы имеем в системах K и K' $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Мы хотим, чтобы $t_{12}' = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчёта можно найти только в том случае, когда интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют пространственноподобными.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то существует такая система отсчёта, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между местами, где произошли эти события в этой системе отсчёта, равно

$$l_{12}' = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \tag{2,9}$$

Подразделение интервалов на времениподобные и пространственноподобные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным не зависит от системы отсчёта.

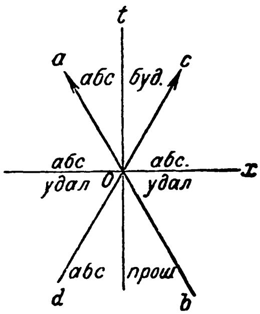

Рис. 2.

Возьмём какое-нибудь событие — назовём его событием O — в качестве начала отсчёта времени и пространственных координат. Другими словами, в четырёхмерной системе координат, на осях которой откладываются x, y, z и t, мировая точка события O будет началом координат. Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время, откладывая их на двух осях (рис. 2). Прямолинейное равномерное движение частицы, проходящей $x = 0$ при $t = 0$, изобразится прямой линией, проходящей через O и наклонённой к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая возможная скорость равна c, то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t. На рис. 2 изображены две прямые, изображающие распространение двух сигналов (со скоростью света) в противоположных направлениях, проходящих через событие O (т. е. проходящих $x = 0$ при $t = 0$). Все прямые, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x = \pm ct$. Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области aOc. Легко сообразить, что во всех точках этой области $c^2t^2 - x^2 > 0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O — времениподобные. В этой области $t > 0$, т. е. все события этой области происходят «после» события O. Но два события, разделённых времениподобным интервалом, ни в какой системе отсчёта не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчёта, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило «до» события O, т. е. когда было бы $t < 0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчёта. Эту область можно поэтому назвать «абсолютно будущей» по отношению к событию O.

Совершенно аналогично все события области bOd являются «абсолютно прошедшими» по отношению к O, т. е. события этой области во всех системах отсчёта происходят до события O.

Наконец, рассмотрим ещё области dOa и cOb. Интервал между любым событием этой области и событием O — пространственноподобный. В любой системе отсчёта эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать «абсолютно удалёнными» по отношению к O. Понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчёта, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчёта, где оно происходит одновременно с O.

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы «конус» $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ в четырёхмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t (этот конус называют «световым конусом»). Области «абсолютно будущего» и «абсолютно прошедшего» изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними времениподобный, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже», что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчёта произвольным образом двужущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчёта.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx'=dy'=dz'=0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2dt'^2,$$

откуда

$$dt'=\frac{ds}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2},$$

или иначе

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдёт время t_2-t_1:

$$t_2'-t_1'=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчёта, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчёта K движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчёта, связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами. И наоборот, с точки зрения системы K' отстают часы в системе K. Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того чтобы установить, что часы в системе K' отстают относительно часов в системе K, надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы K' пролетают мимо часов в K, и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов в K и K' надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов K' с часами в K. Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в K — с теми, мимо которых часы K' пролетают в этот другой момент. При этом мы обнаружим, что часы K' будут отставать по сравнению с часами в K, с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчёта необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обеим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчёта.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные (и наоборот), теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, не движутся равномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчёта не является инерциальной. Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчёта, то системы отсчёта, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправильно.

Промежуток времени, показываемый часами, равен интегралу $\frac{1}{c}\int\limits_a^b ds$, взятому вдоль мировой линии этих часов. Если часы неподвижны, то их мировая линия является, очевидно, прямой, параллельной оси времени; если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой мировой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения. С другой стороны, мы видели, что покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int\limits_a^b ds$, взятый между двумя данными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берётся по прямой мировой линии, соединяющей эти точки [1]) (мировые точки a и b должны, конечно, быть такими, чтобы интервал между ними был времениподобный, в противном случае интеграл комплексный).

[1]) Это свойство интеграла $\int\limits_a^b ds$ связано с тем, что одна из координат мнимая ($\tau = ict$); если бы все четыре координаты были действительными, то $\int ds$ был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчёта к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчёта K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'.

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t=t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси X и X' совпадают, оси Y, Z параллельны осям Y', Z', движение вдоль осей X и X'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z', а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройдённое одной системой относительно другой; если начало отсчёта времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V, то это расстояние есть Vt. Таким образом,

$$x'=x+Vt, \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=t. \tag{4,1}$$

Эти формулы называются преобразованием Галилея. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало ожидать, не удовлетворяет требованию теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские формулы преобразования мы будем искать, как раз исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Если пользоваться удобной для дальнейшего изложения величиной $\tau=ict$, то, как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырёхмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырёхмерном пространстве x, y, z, τ. Но такими преобразованиями являются только параллельные переносы и вращения системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента начала отсчёта времени. Таким образом, искомое преобразование должно математически выражаться как вращение четырёхмерной системы координат x, y, z, τ.

Всякое вращение в четырёхмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, τx, τy, τz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy и xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости τx; координаты y и z при этом не меняются. Если ψ есть угол поворота, то связь между старыми и новыми координатами определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - \tau'\sin\psi, \\ \tau &= x'\sin\psi + \tau'\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчёта K к системе K', которая движется относительно K со скоростью V вдоль оси x. При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координаты x и время τ. Поэтому это преобразование должно быть вида (4,2). Теперь остаётся определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V [1]).

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы отсчёта K'. Тогда $x'=0$ и формулы (4,2) приобретают вид:

$$x = -\tau'\sin\psi, \quad \tau = \tau'\cos\psi,$$

или, деля одно на другое,

$$\frac{x}{\tau} = -\operatorname{tg}\psi.$$

Но $\tau = ict$, а x/t есть, очевидно, скорость V системы K' относительно K. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c}.$$

Отсюда

$$\sin\psi = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя это в (4,2), находим:

$$x = \frac{x' - i\frac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad \tau = \frac{\tau' + i\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя ещё $\tau = ict$, $\tau' = ict'$, имеем окончательно

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4,3}$$

Это и есть искомые формулы преобразования. Они носят название формул преобразования Лоренца и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

---

[1]) Заметим во избежание путаницы, что посредством V мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчёта, а посредством v — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t, проще всего получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (4,3) относительно x', y', z', t'.

Легко видеть из (4,3), что при предельном переходе $c \to \infty$ к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При $V > c$ в формулах (4,3) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движение со скоростью, большей скорости света, невозможно. Невозможно даже пользование системой отсчёта со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (4,3) обратились бы в нуль.

Для скоростей V, малых по сравнению со скоростью света, вместо (4,3) можно пользоваться приближёнными формулами:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \; t = t' + \frac{V}{c^2} x'. \tag{4,4}$$

Пусть в системе K покоится линейка, параллельная оси X. Длина её, измеренная в этой системе, пусть будет $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 и x_1 — координаты обоих концов линейки в системе K). Найдём теперь длину этого стержня, измеренную в системе K'. Для этого надо найти координаты обоих концов стержня (x'_2 и x'_1) в этой системе в один и тот же момент времени t'. Из (4,3) находим:

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе K' есть $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; вычитая x_2 из x_1, находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

«Собственной длиной» стержня называется его длина в той системе отсчёта, в которой он покоится. Обозначим её через $l_0 = \Delta x'$, а длину того же стержня в какой-либо системе отсчёта K — через l. Тогда

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчёта, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью V, уменьшается в отношении $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Этот результат теории относительности называется лоренцовым сокращением.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объём Ω тела сокращается по аналогичной формуле

$$\Omega=\Omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

где Ω_0 есть «собственный объём» тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 3). Пусть в системе K' покоятся часы. В качестве двух событий возьмём два события, происшедших в одном и том же месте x', y', z' пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть $\Delta t'=t_2'-t_1'$. Найдём теперь время Δt, которое прошло между этими же событиями в системе отсчёта K. Из (4,3) имеем

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2-t_1=\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (3,1).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчёта найти координаты того же события в другой системе отсчёта. Теперь мы найдём формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчёта со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси X. Пусть $v_x=\frac{dx}{dt}$ есть компонента скорости частицы в системе K, а $v_x'=\frac{dx'}{dt'}$ — скорость той же частицы в системе K'. Из (4,3) мы имеем

$$dx=\frac{dx'+V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',\quad dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Деля первые три равенства на четвёртое, находим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+V\,dt'}{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'},\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'},\qquad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'},$$

или, деля числитель и знаменатель правых частей этих равенств на dt',

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}},\qquad v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}},\qquad v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}. \tag{5,1}$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c\to\infty$ они переходят в формулы $v_x=v'_x+V$, $v_y=v'_y$, $v_z=v'_z$ классической механики.

В частном случае движения частицы параллельно оси X $v_x=v$, $v_y=v_z=0$. Тогда $v'_y=v'_z=0$, а $v'_x=v'$, причём

$$v=\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть согласно этой формуле снова скорость, не бо́льшая скорости света.

Для скоростей V, значительно меньших скорости света (скорость v может быть любой), имеем приближённо с точностью до членов порядка V/c:

$$v_x=v'_x+V\left(1-\frac{v'^2_x}{c^2}\right),\quad v_y=v'_y-v'_xv'_y\frac{V}{c^2},\quad v_z=v'_z-v'_xv'_z\frac{V}{c^2}.$$

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости XY. Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x=v\cos\theta$, $v_y=v\sin\theta$, а в системе K' имеем $v'_x=v'\cos\theta$, $v'_y=v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями X и X' соответственно в системах K и K').

С помощью формул (5,1) находим тогда

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{\cos\theta'\cdot v'+V}. \tag{5,3}$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчёта к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчёта, — явление, называемое аберрацией света. В этом случае $v = v' = c$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c}+\cos\theta}\sin\theta'. \tag{5,4}$$

Из тех же формул преобразования (5,1) легко получить аналогичную для $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5,5}$$

В случае $V \ll c$ из этой формулы находим с точностью до членов порядка V/c:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5,6}$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырёхмерные векторы

Если мы будем пользоваться в качестве координат события величинами x, y, z, τ, то мы можем рассматривать x, y, z, τ как компоненты вектора в четырёхмерном пространстве. Сумма квадратов этих компонент, т. е. квадрат «длины» вектора $x^2+y^2+z^2+\tau^2$, не меняется при поворотах четырёхмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вектор с компонентами x, y, z, τ называют «четырёхмерным радиус-вектором». Его компоненты мы будем обозначать через x_i, где $i = 1, 2, 3, 4$, причём

$$x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z, \ x_4 = \tau = ict.$$

При преобразовании от одной инерциальной системы отсчёта с другой, т. е. при преобразовании Лоренца, компоненты четырёхмерного радиус-вектора (или, как мы будем писать для краткости, 4-радиус-вектора) преобразуются, согласно (4,3), по формулам

$$x_1 = \frac{x_1' - i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \frac{x_4' + i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (6,1)$$

Четырёхмерным вектором A_i называется совокупность четырёх величин A_1, A_2, A_3, A_4, которые при преобразовании четырёхмерной системы координат преобразовываются как компоненты x_i. При преобразовании Лоренца

$$A_1 = \frac{A_1' - i\frac{V}{c}A_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3', \quad A_4 = \frac{A_4' + i\frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (6,2)$$

Четырёхмерные векторы обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам обычных векторов. Так, легко показать, что подобно обычному скалярному произведению векторов сумма произведений компонент двух 4-векторов $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4$ является скаляром. Мы будем ниже обозначать такое скалярное произведение векторов как A_iB_i и вообще будем считать, что если один и тот же латинский индекс повторяется дважды, то подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3, 4 этого индекса. Так, квадрат «абсолютной величины» 4-вектора запишется в виде A_iA_i или A_i^2. Такой способ обозначения суммирования (при котором опускается знак суммы) очень удобен и значительно упрощает формулы.

Компоненты трёхмерных векторов мы будем обозначать греческими индексами; по дважды повторяющимся греческим индексам будет подразумеваться суммирование от 1 до 3 (например, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Первые три компоненты 4-вектора называют пространственными, а четвёртую — временной по аналогии с 4-радиус-вектором. Временная компонента всех 4-векторов, с которыми нам придётся иметь дело, мнимая. Заметим, что квадрат A_i^2 может быть как положительным, так и отрицательным (или равным нулю), поскольку среди компонент A_i есть мнимая.

Четырёхмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность шестнадцати величин A_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$), которые при преобразовании координат

$$x_i = \alpha_{ik}x_k' \qquad (6,3)$$

преобразуются как произведения координат, т. е. по формулам

$$A_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}A_{ml}'. \qquad (6,4)$$

При преобразовании Лоренца

$$(\alpha_{ik}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{Bmatrix}. \tag{6,5}$$

Единичным 4-тензором δ_{ik} называется тензор, удовлетворяющий условию, что для всякого вектора A_i имеет место

$$\delta_{ik}A_k = A_i. \tag{6,6}$$

Легко видеть, что компоненты этого тензора

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k, \\ 1, \text{ если } i = k. \end{cases} \tag{6,7}$$

Из всякого тензора A_{ik} можно образовать скаляр $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$, называемый «следом» тензора; очевидно, что

$$\delta_{ii} = 4. \tag{6,8}$$

Тензор называется симметричным, если $A_{ki} = A_{ik}$, и антисимметричным, если $A_{ik} = -A_{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты, т. е. компоненты A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, равны нулю, так как, например, должно быть $A_{11} = -A_{11}$.

Аналогично 4-тензору 2 ранга можно определить тензоры высших рангов.

Совершенно антисимметричным единичным 4-тензором 4-го ранга мы назовём такой тензор e_{iklm}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причём отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля только те, у которых все четыре индекса различны. Пусть $e_{1234} = 1$; тогда, очевидно, все не равные нулю компоненты e_{iklm} равны $+1$ или -1, смотря по тому, чётным или нечётным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 1, 2, 3, 4. Заметим, что, как легко проверить, $e^2_{iklm} = 4!$

По отношению к поворотам системы координат величины e_{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако при изменении знака у одной или трёх координат компоненты e_{iklm}, будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e_{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. Псевдотензоры любого ранга, в частности псевдоскаляры, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Если A_{ik} есть антисимметричный тензор, то тензор A_{ik} и псевдотензор $\frac{1}{2} e_{iklm} A_{lm}$ называются дуальными друг другу. Аналогично $e_{iklm} A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-ранга, дуальный вектору A_i. Произведение $\frac{1}{2} e_{iklm} A_{ik} A_{lm}$ тензора 2-го ранга на дуальный ему есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным упомянем о некоторых аналогичных свойствах трёхмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Как и у e_{iklm}, все компоненты $e_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю, за исключением тех, у которых $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Что касается этих компонент, то $e_{123} = 1$; остальные же, очевидно, равны 1 или -1, смотря по тому, чётным или нечётным числом транспозиций можно привести последовательность чисел α, β, γ к 1, 2, 3.

При отражении системы координат, т. е. при изменении всех трёх координат, компоненты обычного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют полярными. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются аксиальными. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным скаляром, а псевдоскаляром; при отражении системы координат он меняет знак. Аксиальный вектор является псевдовектором, дуальным некоторому антисимметричному тензору. Так, если $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, то $C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}$, где

$$C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

В трёхмерном пространстве интегрирование может производиться по объёму, по поверхности и по кривой. В четырёхмерном пространстве соответственно возможны четыре рода интегрирования.

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве; элементом интегрирования является элемент дуги, т. е. 4-вектор dx_i.

2) Интеграл по поверхности (двухмерной) в 4-пространстве. Как известно, в трёхмерном пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух векторах **A** и **B**, на координатные

плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны соответственно $A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$; аналогично в 4-пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух 4-векторах A_i и B_k, на 6 координатных плоскостей $x_i x_k$ определяются антисимметричным тензором $A_i B_k - A_k B_i$. В частности, бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором 2-го ранга df_{ik}, компоненты которого равны проекциям площади элемента поверхности на координатные плоскости. В трёхмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности пользуются вектором df_α, дуальным тензору $df_{\alpha\beta}$, т. е. $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырёхмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор df^*_{ik}, дуальный тензору df_{ik}, т. е.

$$df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} df_{lm}. \tag{6,9}$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и «нормальный» элементу df_{ik}, — все лежащие на нём прямые перпендикулярны ко всем прямым на элементе df_{ik}.

3) Интеграл по гиперповерхности, т. е. по трёхмерному многообразию (трёхмерному объёму). В трёхмерном пространстве объём «параллелепипеда», построенного на трёх векторах **A**, **B**, **C**, равен, как известно, детерминанту третьего ранга, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве проекция объёма «параллелепипеда» (т. е. «площади» гиперповерхности), построенного на трёх 4-векторах A_i, B_i, C_i, определяется детерминантами

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{vmatrix},$$

составляющими тензор 3-го ранга, антисимметричный по всем трём индексам. В частности, бесконечно малый элемент гиперповерхности определяется антисимметричным тензором dS_{ikl}. В качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться 4-вектором dS_i, дуальным тензору dS_{ikl}:

$$dS_i = \frac{1}{6} e_{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{ikl} = e_{klmi} dS_m \tag{6,10}$$

(легко убедиться, что компоненты $dS_i : dS_1 = dS_{234}$, $dS_2 = dS_{14}{}^{8}$ и т. д.). Геометрически — это 4-вектор, по абсолютной величине равный «площади» элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (т. е. перпендикулярный ко всем прямым, проведённым в элементе гиперповерхности). Очевидно, что

$dS_4 = dx\,dy\,dz$ равно элементу трёхмерного объёма dV — проекции гиперповерхности на гиперплоскость $x_4 = \mathrm{const}$.

4) Интеграл по четырёхмерному объёму; элементом интегрирования является элемент 4-объёма $d\Omega = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса для трёхмерных интегралов существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырёхмерные интегралы. Из этих теорем нам понадобятся в дальнейшем следующие две. Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключённому в ней 4-объёму путём замены элемента интегрирования dS_i на оператор

$$dS_i \to d\Omega\,\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6,11}$$

Например, для интеграла от вектора A_i имеем:

$$\oint A_i dS_i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\,d\Omega.$$

Эта теорема является, очевидно, обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по обычной поверхности преобразуется в интеграл по «огибаемой» ею гиперповерхности посредством замены элемента интегрирования $d\overset{*}{f}_{ik}$ на оператор

$$d\overset{*}{f}_{ik} \to \frac{1}{2}\left(dS_i\,\frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{6,12}$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A_{ik} имеем:

$$\int A_{ik}\,d\overset{*}{f}_{ik} = \frac{1}{2}\int\left(dS_i\,\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - dS_k\,\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}\right) = \int dS_i\,\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}.$$

Приведём для полноты ещё правило преобразования интеграла по четырёхмерной замкнутой линии в интеграл по огибаемой ею поверхности; оно осуществляется заменой

$$dx_i \to df_{ki}\,\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{6,13}$$

Например, для интеграла от вектора:

$$\oint A_i\,dx_i = \int df_{ki}\,\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\int df_{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right), \tag{6,14}$$

что является обобщением теоремы Стокса.

§ 7. Четырёхмерные скорость и ускорение

Из обычного трёхмерного вектора скорости можно образовать и четырёхмерный вектор. Такой четырёхмерной скоростью (4-скоростью) частицы является вектор

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}. \tag{7,1}$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3,1)

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где v — обычная трёхмерная скорость частицы. Таким образом,

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично находим u_2, u_3, u_4 и в результате имеем:

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7,2}$$

Заметим, что 4-скорость есть величина безразмерная.

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx_i^2 = -ds^2$, имеем:

$$u_i^2 = -1. \tag{7,3}$$

Геометрически, можно сказать, следовательно, что u_i есть единичный 4-вектор.

4-ускорением частицы называется вектор

$$w_i = \frac{du_i}{ds}. \tag{7,4}$$

С помощью (7,2) и (7,3) находим для его компонент:

$$\left.\begin{aligned} w_\alpha &= \frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_4 &= \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{7,5}$$

Дифференцируя (7,3), имеем:

$$u_i\frac{du_i}{ds} = 0$$

или

$$u_i w_i = 0. \tag{7,6}$$

Задача

Частица движется со скоростью $\mathbf{v}(t)$; определить её ускорение w_0 в той системе отсчёта, в которой она в данный момент покоится, в случае, если. (а) скорость $\mathbf{v}$ меняется только по направлению, (б) $\mathbf{v}$ меняется только по величине, Решение. В указанной системе отсчёта пространственные компоненты w_i равны $\frac{1}{c^2}\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{w_0}{c^2}$, а временная равна нулю. Поэтому $\frac{1}{c^4}w_0^2 = w_i^2$; поскольку w_i^2 есть скаляр, то он равен $\frac{1}{c^4}w_0^2$ и в другой системе отсчёта. Воспользовавшись этим и вычисляя w_i, находим в случае (а):

$$w_0 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|,$$

а в случае (б):

$$w_0 = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right|.$$

ГЛАВА II

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 8. Элементарные частицы в теории относительности

В классической механике можно ввести понятие абсолютно твёрдого тела, т. е. тела, которое ни при каких условиях не может быть деформировано. В теории относительности под абсолютно твёрдыми телами следовало бы соответственно подразумевать тела, все размеры которых остаются неизменными в той системе отсчёта, где они покоятся. Легко, однако, видеть, что теория относительности делает вообще невозможным существование абсолютно твёрдых тел.

Рассмотрим, например, круглый диск, вращающийся вокруг своей оси, и предположим, что он абсолютно твёрд. Связанная с этим диском система отсчёта, конечно, не является инерциальной. Можно, однако, ввести для каждого из небольших элементов диска инерциальную систему отсчёта, в которой бы этот элемент в данный момент покоился; для разных элементов диска, обладающих различными скоростями, эти системы будут, конечно, тоже различны. Рассмотрим ряд элементов длины, расположенных вдоль какого-нибудь радиуса диска. Благодаря абсолютной твёрдости диска длины каждого из этих отрезков в соответствующей инерциальной системе отсчёта остаются такими же, какими они являются, когда диск неподвижен. Эти же длины получит и измеряющий их неподвижный наблюдатель, мимо которого проходит в данный момент рассматриваемый радиус диска, поскольку каждый из отрезков перпендикулярен к своей скорости, а в таком случае не происходит лоренцова сокращения. Поэтому и весь радиус, измеренный неподвижным наблюдателем как сумма составляющих его отрезков, будет таким же, каким он является у неподвижного диска. С другой стороны, длина каждого из элементов окружности диска, проходящего в данный момент мимо неподвижного наблюдателя, подвергается лоренцову сокращению, так что и длина всей окружности (измеренная неподвижным наблюдателем как сумма длин отдельных её отрезков) окажется меньше, чем длина окружности покоящегося диска. Мы приходим, таким образом, к результату, что при вращении диска отношение длины его окружности к радиусу (измеряемое неподвижным наблюдателем) должно было бы измениться вместо того, чтобы остаться равным 2π. Абсурдность этого результата и показывает, что в действительности диск не может быть абсолютно твёрдым и при вращении неизбежно подвергается некоторой сложной деформации, зависящей от упругих свойств материала, из которого сделан диск.

В невозможности существования абсолютно твёрдых тел можно убедиться и другим путём. Пусть какое-нибудь твёрдое тело внешним воздействием в какой-нибудь одной его точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твёрдым, то все его точки должны были бы притти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию; в противном случае тело деформировалось бы. Теория относительности, однако, делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передаётся к остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать двигаться.

Из сказанного вытекают некоторые выводы, касающиеся так называемых элементарных частиц. Под элементарными частицами подразумевают частицы, которые во всех физических явлениях принимают участие только как целое, т. е. не имеет смысла говорить об их частях. Другими словами, состояние элементарной частицы целиком определяется заданием её положения и скорости как целого. Очевидно, что если элементарная частица обладала бы конечными размерами, то она не должна была бы быть деформируемой, так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, теория относительности показывает невозможность существования абсолютно твёрдых тел. Мы приходим, таким образом, к весьма существенному результату, что элементарные частицы не могут иметь конечных размеров, а должны рассматриваться как геометрические точки.

§ 9. Принцип наименьшего действия

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Принцип наименьшего действия заключается, как известно, в том, что для всякой механической системы существует такой интеграл S, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS которого, следовательно, равна нулю[1]).

Определим интеграл действия для свободной материальной частицы, т. е. частицы, не находящейся под действием каких-либо внешних сил. Для этого заметим, что этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчёта, т. е. он должен

[1]) Строго говоря, принцип наименьшего действия утверждает, что интеграл S должен быть минимален лишь вдоль малых участков линии интегрирования. Для линий произвольной длины можно утверждать только, что S имеет экстремум, не обязательно являющийся минимумом.

быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или $\alpha\, ds$, где α — некоторая постоянная. Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где $\int_a^b$ обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя заданными событиями — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определённые моменты t_1 и t_2 времени, т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу. Легко видеть, что для всех частиц α должна быть положительной величиной. Действительно, мы видели в § 3, что $\int_a^b ds$ имеет максимальное значение вдоль прямой мировой линии; интегрируя вдоль кривой мировой линии, можно сделать интеграл сколь угодно малым. Таким образом, интеграл $\int_a^b ds$, взятый с положительным знаком, не может иметь минимума; взятый же с обратным знаком он, очевидно, имеет минимум — вдоль прямой мировой линии.

Этот интеграл действия можно преобразовать в интеграл по времени $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$. Коэффициент L при dt называется, как известно, функцией Лагранжа для данной механической системы. С помощью (3,1) мы находим:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

где v — скорость материальной частицы. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Величина α, как уже отмечалось, характеризует данную частицу. В классической механике всякая частица характеризуется её массой m. Определим связь величин α и m. Она определяется из условия, что при предельном переходе $c \to \infty$ наше выражение для L должно перейти в её классическое выражение $L=\frac{mv^2}{2}$, где m есть классическая масса частицы. Для осуществления этого перехода разложим $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ в ряд по степеням v/c. Тогда, опуская члены высших порядков, получаем:

$$L=-\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx-\alpha c+\frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Как известно, в функции Лагранжа несущественны члены, являющиеся полными производными по времени, и их можно вычёркивать из этой функции[1]). Всякая постоянная является полной производной от этой же постоянной, умноженной на время; поэтому в L её можно опустить. Опуская постоянную αc, получаем $L=\frac{\alpha v^2}{2c}$, в классической же механике $L=\frac{mv^2}{2}$. Следовательно, должно быть $\alpha=mc$.

Таким образом, действие для свободной материальной точки равно

$$S=-mc\int_a^b ds, \tag{9,1}$$

а функция Лагранжа

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9,2}$$

§ 10. Энергия и импульс

Импульсом частицы называется, как известно, вектор $\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ $\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right.$ — символическое обозначение вектора, компоненты которого равны производным от L по соответствующим компонентам $\left.\mathbf{v}\right)$. С помощью (9,2) находим:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,1}$$

При малых скоростях $(v\ll c)$ или в пределе при $c\to\infty$ это выражение переходит в классическое $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$. При $v=c$ импульс p обращается в бесконечность.

---

[1]) Полная производная по времени при интегрировании в интеграле действия $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ даст величину, не зависящую от пути интегрирования которая исчезает при варьировании действия.

Производная от импульса по времени $\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно к скорости. Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,2}$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,3}$$

Отношение силы к ускорению в обоих случаях, следовательно, различно. В первом оно равно $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, а во втором $\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$.

Энергией $\mathscr{E}$ частицы называется, как известно, величина

$$\mathscr{E}=\mathbf{p}\mathbf{v}-L.$$

Подставляя выражение (9,2) и (10,1) для L и $\mathbf{p}$, находим

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,4}$$

Из этого выражения видно, что в релятивистской механике энергия частицы не обращается в нуль даже, когда её скорость равна нулю. Эта «энергия покоя», т. е. энергия при $v=0$, равна $\mathscr{E}=mc^2$.

При малых скоростях ($v/c \ll 1$) имеем, разлагая (10,4) в ряд по степеням v/c,

$$\mathscr{E}\approx mc^2+\frac{mv^2}{2},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Из (10,1) и (10,4) вытекает следующее соотношение между энергией и импульсом свободной материальной частицы:

$$\mathbf{p}=\frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \tag{10,5}$$

При $v=c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света. Из (10,5) мы имеем для таких частиц

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{10,6}$$

Мы увидим в дальнейшем, что свет можно трактовать как такие частицы с массой, равной нулю.

Выведем теперь все полученные соотношения в четырёхмерном виде. Согласно принципу наименьшего действия

$$\delta S = -mc\,\delta \int_a^b ds = 0.$$

Раскроем выражение для δS. Для этого замечаем, что $ds = \sqrt{-dx_i^2}$ и потому

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b \sqrt{-dx_i^2} = -mc \int_a^b \delta \sqrt{-dx_i^2} =$$

$$= -mc \int_a^b \frac{-dx_i\,\delta\,dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}} = mc \int_a^b u_i\,d\delta x_i,$$

так как $\frac{dx_i}{ds}$ есть компонента 4-скорости. Интегрируя по частям, находим

$$\delta S = mc \int_a^b u_i\,d\delta x_i = mcu_i\delta x_i \Big|_a^b - mc \int_a^b \delta x_i\,du_i =$$

$$= mcu_i\delta x_i \Big|_a^b - mc \int_a^b \delta x_i w_i\,ds, \tag{10,7}$$

где $w_i = \frac{du_i}{ds}$ есть 4-ускорение.

Как известно, для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т. е. на пределах $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Истинная траектория определяется тогда из условия $\delta S = 0$. Из (10,7) мы получили бы тогда уравнения $w_i = 0$, т. е. постоянство скорости свободной частицы в четырёхмерном виде.

Для того же, чтобы найти вариацию действия как функцию от координат, надо, как известно, считать заданной точку a, так что $(\delta x_i)_a = 0$. Вторую же точку надо считать переменной, но при этом рассматривать только истинные траектории, т. е. удовлетворяющие уравнениям движения. Поэтому интеграл в выражении (10,7) для δS

равен нулю. Вместо $(\delta x_i)_b$ мы будем писать просто δx_i и, таким образом, находим:

$$\delta S = mcu_i \delta x_i. \tag{10,8}$$

4-вектор с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ называется 4-вектором импульса. Мы будем обозначать его посредством p_i. Из (10,8) видно, что компоненты 4-импульса для свободной материальной частицы равны

$$p_i = mcu_i. \tag{10,9}$$

Как известно из механики, производные $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ суть три компоненты импульса частицы, а производная $-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial \tau} ic$ есть энергия частицы. Пользуясь выражением (7,2) для компонент 4-скорости, легко убедиться в том, что пространственные компоненты p_i действительно совпадают с импульсом **p**, а временная равна $i\mathscr{E}/c$:

$$p_\alpha = p_\alpha, \quad p_4 = i\frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{10,10}$$

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Из этого непосредственно вытекают формулы преобразования импульса и энергии при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Именно, подставляя в общие формулы (6,2) преобразования 4-вектора выражения (10,10) для компонент 4-импульса, находим

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}\mathscr{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{10,11}$$

Имея в виду, что квадрат 4-скорости $u_i^2 = -1$ (7,3), имеем

$$p_i^2 = -m^2c^2. \tag{10,12}$$

Подставляя выражения (10,10) для компонент p_i, находим

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{10,13}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона $\mathscr{H}$. Из (10,13) следует, что

$$\mathscr{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{10,14}$$

При малых (по сравнению с c) скоростях импульс $p \ll mc$. Из (10,14) мы получаем тогда приближённо

$$\mathscr{H} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, получаем известное классическое выражение для функции Гамильтона.

Подставляя в (10,12) $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ вместо p_i, находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = - m^2c^2, \tag{10,15}$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{10,16}$$

Это есть уравнение Гамильтона-Якоби в релятивистской механике.

Переход к предельному случаю классической механики в уравнении (10,16) совершается следующим образом. Раньше всего необходимо учесть, как и при соответствующем переходе в (10,14), что в релятивистской механике энергия частицы содержит член mc^2, которого нет в классической механике. Поскольку действие S связано с энергией посредством $\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}$, то при переходе к классической механике надо вместо S подставить новое действие S' согласно соотношению:

$$S = S' - mc^2t.$$

Подставляя это в (10,16), находим

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + 2m\frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

В пределе при $c \to \infty$ это уравнение переходит в классическое уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

В некоторых вычислениях приходится производить интегрирование по «импульсному пространству». В связи с этим полезно выяснить свойства элемента объёма в импульсном пространстве, $dp_x\, dp_y\, dp_z$, по отношению к преобразованиям Лоренца. Если ввести четырёхмерную систему координат, на осях которых откладываются четыре компоненты 4-вектора импульса частицы, то $dp_x\, dp_y\, dp_z$ можно рассматривать как четвёртую компоненту элемента гиперповерхности, определяемой уравнением (10,12). Элемент гиперповерхности есть 4-вектор, направленный по нормали к этой гиперповерхности; в данном случае направление нормали совпадает, очевидно, с направлением 4-вектора p_i. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\mathcal{E}}, \tag{10,17}$$

как отношение одинаковых компонент двух параллельных 4-векторов, есть величина инвариантная.

Если ввести «сферические координаты» в импульсном пространстве, то элемент объёма $dp_x dp_y dp_z$ заменится на $p^2 dp do$, где do есть элемент телесного угла для направлений вектора $\mathbf{p}$. Замечая, что $p dp = \frac{1}{c^2} \mathscr{E} d\mathscr{E}$ [согласно (10,13)], имеем

$$\frac{p^2 dp do}{\mathscr{E}} = \frac{p d\mathscr{E} do}{c^2}.$$

Таким образом, находим, что инвариантно также и выражение

$$p d\mathscr{E} do. \tag{10,18}$$

Наконец, введём 4-вектор силы, определив его как производную

$$f_i = \frac{dp_i}{ds} = mc \frac{du_i}{ds}. \tag{10,19}$$

Ввиду того, что $u_i \frac{du_i}{ds} = 0$, такому же тождеству

$$f_i u_i = 0 \tag{10,20}$$

удовлетворяют также и компоненты 4-силы. Пространственные компоненты этого 4-вектора f_i образуют вектор $\frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, где $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ есть обычная трёхмерная сила. Временная же компонента равна [как это следует непосредственно из (10,20)]

$$f_4 = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{fv},$$

т. е. связана с работой $\mathbf{fv}$ силы $\mathbf{f}$, производимой ею в единицу времени.

§ 11. Дефект массы

Выведенные в предыдущем параграфе формулы в равной мере применимы и к движению как целого сложного тела, состоящего из многих частиц. В этом случае под массой надо везде подразумевать полную массу тела, а под скоростью — скорость его движения как целого.

Рассмотрим покоящееся (как целое) тело. Его энергия, которую мы можем назвать внутренней, равна тогда просто Mc^2, где M — его масса. Ввиду положительности массы эта величина, очевидно, всегда положительна; положительна также и полная энергия $\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ движущегося тела (v — скорость его движения как целого). Таким образом, мы приходим к выводу, что в релятивистской механике энергия замкнутой системы всегда положительна, в противоположность тому, что имеет место в классической механике, где она может быть как положительной, так и отрицательной.

Внутренняя энергия тела Mc^2 содержит в себе кроме энергии покоя входящих в состав тела частиц ещё и кинетическую энергию этих частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами, Mc^2 не равно сумме $\sum_A m_A c^2$, где m_A — массы частиц, входящих в состав тела, а потому и M не равно $\sum m_A$. Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы; масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Разность $\Delta M = M - \sum_A m_A$ между массой сложного тела и суммой масс его составных частей называют дефектом массы. Величину ΔMc^2 называют энергией связи тела.

Рассмотрим тело, состоящее из двух частей (с массами M_1 и M_2), в системе отсчёта, где оно покоится, и предположим, что тело самопроизвольно распадается на две части, скорости которых обозначим как v_1 и v_2. Тогда закон сохранения энергии даёт

$$Mc^2 = \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{M_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Это уравнение может выполняться только, если $M > M_1 + M_2$, т. е. если дефект массы $\Delta M = M - M_1 - M_2$ положителен. Таким образом, тело может самопроизвольно распасться только в том случае, если его дефект массы (по отношению к частям, на которые оно распадается) положителен. Напротив, если дефект массы отрицателен, то тело является устойчивым и самопроизвольно не распадается. Легко сообразить, что для осуществления распада надо в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его энергии связи $|\Delta M| c^2$.

Задачи

1. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей m_2, причём обе частицы соединяются в одну сложную. Определить массу M и скорость V этой сложной частицы.

Решение. Искомая масса $M = \frac{1}{c^2}\sqrt{\mathscr{E}^2 - p^2c^2}$, где $\mathscr{E}$ и p — энергия и импульс составной частицы, равные сумме энергий и импульсов сталкивающихся частиц. Скорость же $V = pc^2/\mathscr{E}$. В результате находим:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad V = \frac{m_1 v}{\left(m_1 + m_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}.$$

2. Покоящееся тело с массой M распадается на две части с массами M_1 и M_2; определить энергии $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ этих частей.

Решение. Закон сохранения энергии и импульса даёт $Mc^2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ и $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, или, иначе, $p_1^2 = p_2^2$, т. е. $\mathscr{E}_1^2 - \mathscr{E}_2^2 = M_1^2c^4 - M_2^2c^4$. Из обоих уравнений находим

$$\mathscr{E}_1 = c^2 \frac{M^2 + M_1^2 - M_2^2}{2M}, \qquad \mathscr{E}_2 = c^2 \frac{M^2 - M_1^2 + M_2^2}{2M}.$$

§ 12. Столкновения

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц, т. е. такое столкновение, при котором не меняются внутренние состояния частиц. Энергии и импульсы частиц до столкновения в некоторой системе отсчёта K пусть будут соответственно $\mathbf{p}_{10}$, $\mathscr{E}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$, $\mathscr{E}_{20}$; при этом ось X системы K выбрана вдоль направления вектора $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20}$ полного импульса частиц.

Для исследования столкновения удобно перейти к другой системе отсчёта K', в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. Согласно (10,5) скорость $\mathbf{V}$ системы K' относительно K равна[1])

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20})\, c^2}{\mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}}. \qquad (12,1)$$

По общим формулам преобразования (10,11) и формуле (12,1) легко вычислить энергии и импульсы обеих частиц в системе K'; мы будем обозначать их посредством $\mathscr{E}'_1$, $\mathscr{E}'_2$, $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$.

При столкновении частиц сумма их импульсов и сумма энергий остаются неизменёнными. В системе K' $\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 = 0$, т. е. импульсы равны по величине и противоположны по направлению. При столкновении импульсы $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ только поворачиваются, оставаясь равными и взаимно противоположными по направлению. При этом абсолютные величины каждого из импульсов остаются в силу закона сохранения энергии неизменными.

Рассмотрим более подробно столкновения, при которых одна из частиц (вторая) до столкновения покоилась (в системе K). В системе K' эта частица имеет до столкновения скорость $-V$ вдоль

---

[1]) При этом мы рассматриваем систему из двух сталкивающихся частиц как одно тело. Формулу (12,1) можно получить также непосредственно из формул преобразования (10,11). Согласно этим формулам и помня, что в K' общий импульс равен нулю, имеем

$$\mathscr{E}_{01} + \mathscr{E}_{02} = \frac{\mathscr{E}'_{01} + \mathscr{E}'_{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p_{01x} + p_{02x} = \frac{\frac{V}{c^2}(\mathscr{E}'_{01} + \mathscr{E}'_{02})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2}(\mathscr{E}_{01} + \mathscr{E}_{02}),$$

т. е., если написать в векторном виде, формула (12,1) (штрихованные величины относятся к системе K').

оси x' и соответственно импульс $-\frac{m_2 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. Обозначим посредством χ угол, на который поворачиваются при столкновении импульсы $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ в системе K' (угол рассеяния в системе K'). Поскольку абсолютная величина p_1 при столкновении не меняется, то x'-компонента импульса частицы m_2 после столкновения будет

$$-\frac{m_2 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cos\chi.$$

Энергия же этой частицы в системе K' есть

$$\mathscr{E}_2' = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

С помощью последней из формул преобразования (10,11) находим отсюда энергию $\mathscr{E}_2$ первоначально покоившейся частицы после столкновения в исходной системе K:

$$\mathscr{E}_2 = \frac{m_2 c^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos\chi\right)}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Окончательную формулу для $\mathscr{E}_2$ мы получим, выразив вспомогательную величину V с помощью формулы (12,1) в виде

$$V = \frac{p_{10}c^2}{\mathscr{E}_{10}+m_2c^2} = \frac{c\sqrt{\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2c^4}}{\mathscr{E}_{10}+m_2c^2} \tag{12,2}$$

(до столкновения $p_{20}=0$, $\mathscr{E}_{20}=m_2c^2$). Элементарное вычисление даёт:

$$\mathscr{E}_2 = m_2c^2 + \frac{m_2\left(\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2c^4\right)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}(1-\cos\chi). \tag{12,3}$$

Второй член представляет собой энергию, переданную при столкновении от второй частицы к первой. Имея в виду, что сумма энергий обеих частиц при столкновении сохраняется, мы можем, очевидно, непосредственно написать для энергии второй (налетающей) частицы после столкновения выражение:

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{10} - \frac{m_2\left(\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2c^4\right)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}(1-\cos\chi). \tag{12,4}$$

Наибольшая возможная передача энергии при столкновении получается при $\chi=\pi$. Соответствующее значение $\mathscr{E}_2$ есть

$$\mathscr{E}_{2\max}=m_2c^2+\frac{2m_2\left(\mathscr{E}_{10}^2-m_1^2c^4\right)}{m_1c^2+m_2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}. \tag{12,5}$$

Частица же m_1 будет иметь при этом минимальную энергию:

$$\mathscr{E}_{1\min}=m_1c^2+\frac{(\mathscr{E}_{10}-m_1c^2)(m_2-m_1)^2c^2}{m_1c^2+m_2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}. \tag{12,6}$$

Отметим некоторые следствия полученных формул. Написав формулу (12,6) в виде

$$\frac{\mathscr{E}_{1\min}-m_1c^2}{\mathscr{E}_{10}-m_1c^2}=\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1^2+m_2^2+\dfrac{2}{c^2}m_2\mathscr{E}_{10}},$$

мы видим, что в предельном случае малых скоростей (когда $\mathscr{E}\cong mc^2+\frac{mv^2}{2}$) получается известный из нерелятивистской механики результат — отношение минимальной кинетической энергии к первоначальной кинетической энергии налетающей частицы стремится к постоянному пределу, равному $\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2$. В обратном же предельном случае близких к c скоростей частицы m_1 (т. е. больших $\mathscr{E}_{10}$) написанное отношение стремится к нулю; к постоянному же пределу стремится сама величина $\mathscr{E}_{1\min}$. Этот предел равен

$$\mathscr{E}_{1\min}=\frac{m_1^2+m_2^2}{2m_2}c^2.$$

Предположим, что $m_2\gg m_1$, т. е. масса налетающей частицы мала по сравнению с массой покоившейся частицы. Согласно классической механике при этом лёгкая частица могла бы передать тяжёлой только ничтожную часть своей энергии. Такое положение не имеет, однако, места в релятивистской теории. Из формулы (12,6) видно, что при достаточно больших энергиях $\mathscr{E}_{10}$ доля переданной энергии может достичь порядка единицы. Для этого, однако, недостаточно, чтобы скорость частицы m_1 была порядка c, а необходимы, как легко видеть, энергии порядка

$$\mathscr{E}_{10}\sim m_2c^2,$$

т. е. лёгкая частица должна обладать энергией порядка энергии покоя тяжёлой частицы.

Аналогичное положение имеет место при $m_2\ll m_1$, т. е. когда тяжёлая частица налетает на лёгкую. И здесь, согласно классической механике, происходила бы лишь незначительная передача энергии.

Доля передаваемой энергии начинает становиться значительной только начиная от энергий порядка

$$\mathscr{E}_{10} \sim \frac{m_1^2}{m_2} c^2.$$

Отметим, что и здесь речь идёт не просто о скоростях порядка скорости света, а об энергиях, больших по сравнению с $m_1 c^2$.

Наконец, выведем соотношения, связывающие углы рассеяния частиц в системе K (углы отклонения от направления первоначального движения частицы m_1) с изменениями их энергии при столкновении. Для этого замечаем, что для каждой из двух частиц имеет место соотношение

$$(p_{i0} - p_i) U_i = 0, \tag{12,7}$$

где p_{i0}, p_i — 4-импульсы частицы до и после столкновения, а U_i — 4-вектор скорости, пространственные компоненты которого совпадают (в системе K) со скоростью $\mathbf{V}$. Действительно, в левой стороне этого равенства стоит скалярная величина и потому достаточно проверить это соотношение в какой-либо одной системе отсчёта. В системе K' имеем $U_\alpha = 0$, так что $(p_{i0} - p_i) U_i = \frac{i}{c}(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}) i$; но в системе K' энергия частицы при столкновении не меняется, т. е. $\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}$, чем и доказывается соотношение (12,7).

Применим сначала соотношение (12,7) к первоначально покоившейся частице m_2. Пусть θ_2 есть угол рассеяния этой частицы в системе K. Тогда, подставляя значения компонент векторов $p_{i0}^{(2)}$, $p_i^{(2)}$, U_i в системе K, найдём

$$\mathscr{E}_2 - m_2 c^2 = V p_2 \cos\theta_2$$

или, подставив выражение (12,3) для V:

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathscr{E}_{10} + m_2 c^2)(\mathscr{E}_2 - m_2 c^2)}{p_{10} p_2 c^2}. \tag{12,8}$$

Аналогичным образом, применяя соотношение (12,7) к налетающей частице, получим

$$\mathscr{E}_{10} - \mathscr{E}_1 = V (p_{10} - p \cos\theta_1),$$

откуда, подставляя выражение для V, найдём

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathscr{E}_1 (\mathscr{E}_{10} + m_2 c^2) - \mathscr{E}_{10} m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{p_{10} p_1 c^2}. \tag{12,9}$$

Формулы (12,8) и (12,9) решают поставленный вопрос. Отметим, что если $m_1 > m_2$, т. е. налетающая частица тяжелее покоящейся, то угол рассеяния θ_1 не может превышать некоторого максимального значения. Элементарным вычислением легко найти, что это значение определяется равенством

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1},$$

в точности совпадающим с классическим результатом [1]).

Формулы (12,8) и (12,9) упрощаются в случае, когда налетающая частица обладает равной нулю массой и соответственно равной c скоростью. Положив $m_1 = 0$, $p_{10} = \frac{\mathscr{E}_{10}}{c}$, $p_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{c}$, найдём:

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathscr{E}_1(\mathscr{E}_{10} + m_2c^2) - \mathscr{E}_{10}m_2c^2}{\mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_1}, \tag{12,10}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathscr{E}_{10} + m_2c^2)(\mathscr{E}_2 - m_2c^2)}{\mathscr{E}_{10}p_2c}. \tag{12,11}$$

§ 13. Момент импульса

Как известно, классическая механика приводит к результату, что у замкнутой системы кроме энергии и импульса сохраняется ещё и момент импульса, т. е. вектор

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$$

($\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — радиус-вектор и импульс частицы; суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы). Сохранение момента является следствием того, что функция Лагранжа для замкнутой системы в силу изотропии пространства не меняется при повороте системы как целого.

Проделав теперь аналогичный вывод в четырёхмерном виде, мы получим релятивистское выражение для момента. Пусть x_i — координаты одной из частиц системы. Произведём бесконечно малый поворот в четырёхмерном пространстве. Тогда координаты x_i каждой частицы перейдут в x'_i, подвергнувшись линейному преобразованию,

$$x'_i = x_i + x_k\,\delta\Omega_{ik}, \tag{13,1}$$

где $\delta\Omega_{ik}$ — бесконечно малый 4-тензор, определяющий поворот. При повороте длина x_i^2 радиус-вектора должна остаться неизменной, т. е. $x_i^2 = x_i'^2$. Подставляя сюда (13,1) и отбрасывая члены, квадратичные по $\delta\Omega_{ik}$, как бесконечно малые высшего порядка, находим

$$x_ix_k\,\delta\Omega_{ik} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных x_i. Ввиду того, что x_ix_k есть симметричный тензор, $\delta\Omega_{ik}$ должно быть для этого антисимметричным тензором (произведение симметричного тен-

[1]) См., например, «Механика», § 11.

зора на антисимметричный, очевидно, всегда тождественно равно нулю). Таким образом, находим, что

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \qquad (13,2)$$

Изменение δS действия S при бесконечно малом изменении координат имеет вид [см. (10,7)]:

$$\delta S = \sum p_i \delta x_i$$

(суммирование производится по всем частицам системы). В случае рассматриваемого нами сейчас поворота $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x_k$, а потому

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p_i x_k.$$

Если разбить тензор $\sum p_i x_k$ на симметричную и антисимметричную части, то первая из них при умножении на антисимметричный тензор тождественно даёт нуль. Поэтому, выделяя из $\sum p_i x_k$ антисимметричную часть, мы можем написать предыдущее равенство в виде

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i). \qquad (13,3)$$

Для замкнутой системы, в силу изотропии пространства и времени, при повороте в 4-пространстве функция Лагранжа не меняется, т. е. параметры $\delta\Omega_{ik}$ этого поворота являются циклическими координатами. Поэтому соответствующие обобщённые импульсы сохраняются. Этими импульсами являются величины $\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}}$. Из (13,3) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i).$$

Мы видим, следовательно, что у замкнутой системы сохраняется тензор

$$M_{ik} = \sum (x_i p_k - x_k p_i). \qquad (13,4)$$

Этот антисимметричный тензор носит название 4-тензора момента.

Легко убедиться, что пространственные компоненты этого тензора (i, $k = 1, 2, 3$) являются компонентами трёхмерного вектора момента импульса:

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}], \qquad (13,5)$$

$$M_{zx} = -M_{xz} = M_y, \quad M_{xy} = -M_{yx} = M_z, \quad M_{yz} = -M_{zy} = M_x.$$

Что касается компонент $M_{4\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), то, как легко убедиться,

$$M_{4\alpha} = ic \sum \left(t p_\alpha - \frac{\mathcal{E} x_\alpha}{c^2} \right). \qquad (13,6)$$

Эти три компоненты, следовательно, составляют вектор

$$ic\sum\left(t\mathbf{p}-\frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2}\right).$$

В силу сохранения M_{ik} для замкнутой системы мы имеем, в частности,

$$\sum\left(t\mathbf{p}-\frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2}\right)=\text{const}.$$

Поскольку, с другой стороны, полная энергия $\sum\mathscr{E}$ тоже сохраняется, то это равенство можно написать в виде

$$\frac{\Sigma\mathscr{E}\mathbf{r}}{\Sigma\mathscr{E}}-\frac{c^2\Sigma\mathbf{p}}{\Sigma\mathscr{E}}t=\text{const}. \tag{13,7}$$

Отсюда мы видим, что точка с радиус-вектором

$$\mathbf{R}=\frac{\Sigma\mathscr{E}\mathbf{r}}{\Sigma\mathscr{E}} \tag{13,8}$$

равномерно движется со скоростью

$$\mathbf{V}=\frac{c^2\Sigma\mathbf{p}}{\Sigma\mathscr{E}}, \tag{13,9}$$

которая есть не что иное, как скорость движения системы как целого. Такая точка, как известно, называется центром инерции; формула (13,9) определяет координаты центра инерции в релятивистской механике. Надо, однако, заметить, что поскольку компоненты $\mathbf{R}$, определяемые формулой (13,9), не являются компонентами какого-либо 4-вектора, то при переходе к другой системе отсчёта координаты центра инерции не преобразуются по формулам преобразования Лоренца. Если скорости всех частиц гораздо меньше c, то можно приближённо положить $\mathscr{E}=mc^2$ и (13,8) переходит в известное выражение для центра инерции.

Задача

В системе отсчёта K скорость движения системы частиц как целого равна V (и направлена вдоль оси x), а её момент импульса (относительно начала координат, выбранного в центре инерции системы) — $\mathbf{M}$. Определить момент импульса $\mathbf{M}_0$ в системе отсчёта K_0, в которой система частиц покоится как целое.

Решение. Компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих компонент вектора. Поскольку при преобразовании Лоренца (6,2) y-, z-компоненты 4-вектора не меняются, то компоненты M_{xy}, M_{xz} тензора момента преобразуются как x-компонента 4-вектора, а компонента M_{yz} не меняется вовсе. Производя преобразование от системы K к системе K_0, надо иметь в виду, что в системе K: $M_{4y}=M_{4z}=0$ (действительно, $\sum\mathscr{E}y=\sum\mathscr{E}z=0$, поскольку начало координат выбрано в центре инерции, а $\sum p_y = \sum p_z = 0$, поскольку скорость **V** направлена вдоль оси x).

В результате преобразования получим:

$$M_{0x} = M_x, \quad M_{0y} = \frac{M_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad M_{0z} = \frac{M_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Для абсолютной величины момента имеем:

$$M_0^2 = M_x^2 + \frac{M_y^2 + M_z^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

ГЛАВА III

ЗАРЯД В ПОЛЕ

§ 14. Четырёхмерный потенциал поля

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового поля. Именно, вместо того чтобы говорить о том, что одна частица действует на другую, можно сказать, что частица создаёт вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила. В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории же относительности благодаря конечности скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Мы будем рассматривать два вида полей: поля гравитационные и электромагнитные. Изучению гравитационных полей посвящены главы IX — X. В остальных главах рассматриваются только электромагнитные поля.

Взаимодействие данного электромагнитного поля с некоторой частицей определяется одной величиной, характеризующей эту частицу. Эта величина называется зарядом частицы. Взаимодействие поля с частицей пропорционально заряду частицы. Заряд может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, он может быть равен нулю. В этом случае говорят, что частица не заряжена, в отличие от частиц заряженных. Заметим, что до тех пор, пока у нас нет никаких формул, связывающих заряд с известными уже величинами, мы можем произвольно выбирать единицу для измерения заряда.

4*

Как мы видели в § 9, для свободной материальной частицы действие $S = -mc\int\limits_a^b ds$. Если заряженная частица (мы будем ниже говорить о ней просто как о заряде) находится в поле, то к этому интегралу надо прибавить дополнительный член, описывающий взаимодействие поля с частицей. Этот член должен содержать как величины, характеризующие частицу (в частности её заряд e), так и величины, характеризующие поле. Оказывается, что он имеет вид:

$$\frac{e}{c}\int\limits_a^b A_i\,dx_i.$$

Скорость света c мы ввели сюда для удобства; никаких других постоянных перед интегралом мы можем не писать, поскольку единица для измерения заряда ещё не установлена. 4-вектор A_i характеризует электромагнитное поле; его компоненты являются, вообще говоря, функциями координат и времени. Вектор A_i носит название 4-потенциала поля. Таким образом, дйствие для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$S = \int\limits_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c}A_k\,dx_k\right). \tag{14,1}$$

Заметим, что единицы для измерения A_i тоже остаются произвольными, пока произволен выбор единиц для e.

Три пространственные компоненты вектора A_i образуют трёхмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый векторным потенциалом поля. Временная компонента вектора A_i мнима, т. е. имеет вид $A_4 = i\varphi$. Действительная величина φ называется скалярным потенциалом поля. Таким образом,

$$A_{1,2,3} = A_{x,y,z};\quad A_4 = i\varphi. \tag{14,2}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S = \int\limits_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r} - e\varphi\,dt\right).$$

Далее, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы. Поэтому действие принимает вид

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi\right)dt. \tag{14,3}$$

Подинтегральное выражение есть не что иное, как функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{14,4}$$

Эта функция отличается от функции Лагранжа (9,2) для свободной частицы членами $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$, которое описывают взаимодействие заряда с полем.

Производная $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ есть обобщённый импульс частицы; обозначим его посредством **P**. Производя дифференцирование, находим:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{14,5}$$

Здесь мы обозначили посредством **p** обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом.

Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по известной общей формуле

$$\mathscr{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Подставляя сюда (14,4), найдём

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{14,6}$$

Функция Гамильтона, однако, должна быть выражена не через скорость, а через обобщённый импульс частицы. Возводя в квадрат $\mathscr{H} - e\varphi$ и сравнивая с выражением для $\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}A\right)^2$ из (14,5), получим соотношение

$$\left(\frac{\mathscr{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{14,7}$$

или иначе:

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{14,8}$$

Для малых скоростей, т. е. в классической механике, функция Лагранжа (14,4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{14,9}$$

В этом приближении $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{14,10}$$

Наконец, выпишем уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле. Оно получается заменой в функции Гамильтона обобщённого импульса $\mathbf{P}$ на $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$, а самого $\mathscr{H}$ — на $-\frac{\partial S}{\partial t}$. Таким образом, получим из (14,7):

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{14,11}$$

§ 15. Уравнения движения заряда в поле

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Поэтому заряд, помещённый во внешнее поле, подвергается, строго говоря, действию этого поля, изменённого им самим. Однако если заряд e не очень велик, то действием заряда на поле, т. е. изменением поля благодаря заряду, можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение заряда в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит при этом ни от координат, ни от скорости заряда. Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем (см. § 74). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием интегралов действия. Уравнения движения будут, следовательно, обычными уравнениями Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{15,1}$$

где L определяется формулой (14,4).

Производная $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ есть обобщённый импульс частицы (14,5). Далее, пишем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad}\mathbf{ab} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два вектора. Применяя эту формулу к $\mathbf{A}\mathbf{v}$ и помня, что дифференцирование по $\mathbf{r}$ производится при постоянном $\mathbf{v}$, находим

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}] - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}] - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но полный дифференциал $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ складывается из двух частей: из изменения $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстоянии $d\mathbf{r}$. Эта вторая часть, как известно из векторного анализа, есть $(d\mathbf{r}\,\nabla)\mathbf{A}$. Таким образом, производная $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} - e\operatorname{grad}\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{A}]. \qquad (15,2)$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (15,2) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть [первый и второй члены в правой части (15,2)] не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости, а именно, пропорциональна скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесённую к заряду, равному единице, называют напряжённостью электрического поля; обозначим её посредством $\mathbf{E}$. Итак, по определению,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \qquad (15,3)$$

Множитель при скорости, точнее при $\mathbf{v}/c$, в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют напряжённостью магнитного поля; обозначим её через $\mathbf{H}$. Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (15,4)$$

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E} \neq 0$, а $\mathbf{H} = 0$, то говорят об электрическом поле; если же $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{H} \neq 0$, то поле называют магнитным. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{15,5}$$

Стоящее справа выражение носит название лоренцовой силы. Первая её часть — сила, с которой действует электрическое поле на заряд, — не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля $\mathbf{E}$. Вторая часть — сила, оказываемая магнитным полем на заряд, — пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и направлению магнитного поля $\mathbf{H}$.

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс $\mathbf{p}$ приближённо равен своему классическому выражению $m\mathbf{v}$, и уравнение движения (15,5) переходит в

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{15,6}$$

Таким образом, мы можем рассматривать движение в поле также и частиц, подчиняющихся классической механике (т. е. кинетическая энергия которых есть $mv^2/2$, а импульс $m\mathbf{v}$).

Выведём ещё уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем, т. е. производную

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Легко убедиться, что

$$d\mathscr{E}_{\text{кин}} = \mathbf{v}\,d\mathbf{p},$$

откуда

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ из (15,6), имеем

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \tag{15,7}$$

(замечая, что $[\mathbf{vH}]\,\mathbf{v} = [\mathbf{vv}]\,\mathbf{H} = 0$).

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведённая полем над частицей (в единицу времени). Из (15,7) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время dt, т. е. при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$, равна, очевидно, $e\mathbf{E}\,d\mathbf{r}$.

Подчеркнём то обстоятельство, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нём зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на заряд, всегда перпендикулярна к скорости заряда.

Задача

Выразить ускорение частицы через её скорость и напряжённости электрического и магнитного полей.

Решение. Подставляем в уравнение движения (15,5) $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}\mathscr{E}_{\text{кин}}}{c^2}$, а $\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}$ выражаем согласно (15,7). В результате найдем

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{vE})\right\}.$$

§ 16. Изотропия времени

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению и замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны, т. е. время изотропно. Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения (15,5) не меняются, если произвести замену

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \tag{16,1}$$

При этом, согласно (15,3) и (15,4), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \to \varphi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \tag{16,2}$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением $\mathbf{H}$.

§ 17. Градиентная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. Раньше всего обратим внимание на то обстоятельство, что поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на движение находящихся в нём зарядов. Но в уравнения движения

(15,5) входят не потенциалы, а напряжённости поля **E** и **H**. Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами **E** и **H**.

Если заданы потенциалы **A** и φ, то этим, согласно (15,3) и (15,4), вполне однозначно определены **E** и **H**, а значит и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к каждой компоненте потенциала A_k величину $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, где f — произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{17,1}$$

При такой замене в интеграле действия (14,1) появится дополнительный член

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k = \frac{e}{c}df.$$

Но прибавление к подинтегральному выражению в действии полного дифференциала, как известно[1]), не влияет на уравнения движения.

Если вместо четырёхмерного потенциала ввести векторный и скалярный и вместо координат x_i — координаты x, y, z, t, то четыре равенства (17,1) можно написать в виде

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{17,2}$$

Легко убедиться в том, что электрическое и магнитное поля, определённые равенствами (15,3) и (15,4), действительно не изменяются при подстановке вместо **A** и φ потенциалов **A'** и φ', определённых согласно (17,2). Таким образом, преобразование потенциалов (17,1) не изменяет поля. Потенциалы определены поэтому не однозначно — векторный потенциал определён с точностью до градиента произвольной функции и скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, очевидно, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу — любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение **E** и **H** входят только производные от **A** и φ и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряженности поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию (17,2) потенциалов; в частности, все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому

---

[1]) При интегрировании полного дифференциала некоторой функции получается постоянная разность значений этой функции на пределах интеграла. При варьировании интеграла эта постоянная исчезает.

преобразованию. Эту инвариантность мы назовём градиентной[1]) (по-немецки её называют Eichinvarianz, по-английски — gauge invariance).

Описанная неоднозначность потенциалов даёт всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному выбранному нами дополнительному условию (соотношению между ними). Подчёркиваем, что именно одному условию, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f в (17,2). В частности, всегда возможно выбрать потенциал поля так, чтобы скалярный потенциал φ был равен нулю. Сделать векторный потенциал равным нулю, если он нулю не равен, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A}=0$ представляет собой три дополнительных условия (для трёх компонент $\mathbf{A}$).

§ 18. Постоянное электромагнитное поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле попрежнему равно, согласно (15,4), $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Постоянное электрическое поле равно, согласно (15,3),

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{18,1}$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

Мы видели в предыдущем параграфе, что потенциалы поля определены не однозначно. Легко, однако, убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на φ накладывают ещё дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определённое значение в определённой точке пространства; чаще всего выбирают φ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определённой, и скалярный потенциал постоянного поля, таким образом, становится вполне однозначным.

Напротив, векторный потенциал попрежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; именно, к нему можно прибавить градиент от любой функции координат.

Определим, чему равна энергия заряда в постоянном электромагнитном поле. Если поле постоянно, то и функция Лагранжа для заряда не зависит явно от времени. Как известно, в этом случае энергия сохраняется, совпадая с функцией Гамильтона.

Согласно (14,6) имеем:

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+e\varphi. \tag{18,2}$$

[1]) Это название предложено В. А. Фоком.

Таким образом, благодаря наличию поля к энергии частицы прибавляется член $e\varphi$ — потенциальная энергия заряда в поле. Отметим то существенное обстоятельство, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала. В связи с формулой $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ и с (18,1) это значит, что магнитное поле не влияет на энергию зарядов. Энергию частицы может изменить только электрическое поле. Это стоит в связи с тем, что, как упоминалось в конце § 15, магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Если напряжённость поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют однородным. Выразим скалярный потенциал однородного электрического поля через напряжённость поля $\mathbf{E}$. Легко убедиться в том, что для однородного поля

$$\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}, \tag{18,3}$$

так как, поскольку $\mathbf{E} = \mathrm{const.}$, $-\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} (\mathbf{E}\mathbf{r}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} + [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{r}] = \mathbf{E}$ (напоминаем, что $\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0$).

Выразим теперь векторный потенциал однородного магнитного поля через напряжённость этого поля $\mathbf{H}$. Легко убедиться, что потенциал $\mathbf{A}$ может быть написан в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}]. \tag{18,4}$$

Действительно, помня, что $\mathbf{H} = \mathrm{const.}$, мы находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\operatorname{rot} [\mathbf{H}\mathbf{r}] = \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напоминаем, что $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{18,5}$$

(ось Z выбрана вдоль направления $\mathbf{H}$). Легко убедиться, что и при таком выборе $\mathbf{A}$ имеет место $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Задача

1. Написать вариационный принцип для траектории частицы (принцип Мопертюи) в постоянном электромагнитном поле в релятивистской механике.

Решение. Принцип Мопертюи заключается, как известно из механики, в том, что если полная энергия частицы сохраняется (движение в постоянном поле), то её траектория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta \int \mathbf{P}\, d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ — обобщённый импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берётся вдоль траектории частицы. Подставляя $\mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ и замечая, что направления $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем

$$\delta\int\left(p\,dl+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}\right)=0,$$

где $dl=\sqrt{d\mathbf{r}^2}$ есть элемент дуги. Определяя p из $p^2+m^2c^2=\left(\frac{\mathscr{E}-e\varphi}{c}\right)^2$, находим окончательно

$$\delta\int\left\{\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}-e\varphi}{c}\right)^2-m^2c^2}\,dl+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}\right\}=0$$

§ 19. Движение в постоянном однородном электрическом поле

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Направление поля примем за ось X. Если начальная скорость (скорость в момент времени $t=0$) есть $\mathbf{v}_0$, то заряд, очевидно, будет двигаться всё время в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}_0$. Эту плоскость выберем за плоскость XY. Тогда уравнения движения (15,5), т. е.

$$\dot{\mathbf{p}}=e\mathbf{E}$$

(точка над $\mathbf{p}$ обозначает дифференцирование по t), примут вид

$$\frac{dp_x}{dt}=eE,\quad \frac{dp_y}{dt}=0;$$

отсюда

$$p_x=eEt,\quad p_y=p_0. \tag{19,1}$$

Начало отсчёта времени (т. е. момент $t=0$) мы выбрали в тот момент, когда $p_x=0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия $\mathscr{E}$ частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна, согласно (10,13), $\mathscr{E}=c\sqrt{m^2c^2+p^2}$. Подставляя сюда (19,1), находим в нашем случае

$$\mathscr{E}=\sqrt{m^2c^4+c^2p_0^2+(ceEt)^2}.$$

Согласно (10,5) скорость частицы $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{p}c^2}{\mathscr{E}}$. Для скорости $v_x=\dot{x}$ мы имеем, следовательно, в нашем случае

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

где $\mathscr{E}_0=c\sqrt{m^2c^2+p_0^2}$ есть энергия при $t=0$. Интегрируя, находим:

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}. \tag{19,2}$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю.

Для определения y имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathscr{E}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

откуда

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{argsh} \frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{19,3}$$

Уравнение траектории находим, выражая из (19,3) t через y и подставляя в (19,2). Это даёт:

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}. \tag{19,4}$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0 = mv_0$, $\mathscr{E}_0 = mc^2$ и $\operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}$ в (19,4) можно разложить в ряд по степеням $\frac{1}{c}$. Тогда мы получаем с точностью до членов высшего порядка:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2, \tag{19,5}$$

т. е. заряд движется по параболе, — результат, хорошо известный из классической механики.

§ 20. Движение в постоянном однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось Z. Уравнения движения мы

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}]$$

перепишем в другом виде, подставив вместо импульса, согласно (10,6),

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E} \mathbf{v}}{c^2},$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы, которая, как мы знаем из § 18, в магнитном поле постоянна. Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{vH}], \tag{20,1}$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \tag{20,2}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega = \frac{ecH}{\mathscr{E}}. \tag{20,3}$$

Умножим второе из уравнений (20,2) на i и сложим с первым. Мы находим

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Её можно написать в виде $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны. Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)}$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha). \tag{20,4}$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t}, то из (20,4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е. v_{0t} есть скорость частицы в плоскости XY, остающаяся при движении постоянной.

Из (20,4) находим, интегрируя ещё раз,

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \tag{20,5}$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \tag{20,6}$$

(p_t — проекция импульса на плоскость XY). Из третьего уравнения (20,2) находим $v_z = v_{0z}$ и

$$z = z_0 + v_{0z}t; \tag{20,7}$$

x_0, y_0, z_0 — начальные координаты частицы.

Из (20,5) и (20,7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r, определяемым (20,6). Скорость частицы при этом постоянна. В частном случае, когда $v_{0z} = 0$, т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю.

Величина ω, как видно из формул, есть циклическая частота вращения частицы в плоскости, перпендикулярной к полю.

Если скорость частицы мала, то мы можем приближённо положить $\mathscr{E} = mc^2$. Тогда частота ω превращается в

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{20,8}$$

Задачи

1. Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (в отсутствии поля) есть ω_0.

Решение. Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси Z) гласят:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y}+\omega_0^2 y=-\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z}+\omega_0^2 z=0.$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, находим

$$\ddot{\zeta}+\omega_0^2\zeta=-i\frac{eH}{mc}\dot{\zeta},$$

где $\zeta=x+iy$. Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Если поле H слабо, то эта формула переходит в

$$\omega_0\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.

2. Найти изменение движения заряженной частицы, находящейся в магнитном поле при медленном изменении этого поля.

Решение. Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты. Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, является периодическим, то адиабатическим инвариантом является интеграл $I=\oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r}$, взятый по полному периоду движения, — в данном случае по окружности ($\mathbf{P}_t$ — проекция обобщённого импульса на указанную плоскость). Подставляя $\mathbf{P}_t=\mathbf{p}_t+\frac{e}{c}\mathbf{A}$, имеем

$$I=\oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r}=\oint \mathbf{p}_t d\mathbf{r}+\frac{e}{c}\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{r}.$$

В первом члене замечаем, что $\mathbf{p}_t$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$; ко второму применяем теорему Стокса:

$$I=2\pi r p_t+\frac{e}{c}H\pi r^2,$$

где r — радиус орбиты. Подставляя $r=\frac{cp_t}{eH}$ [см. (21,6)], находим

$$I=\frac{3\pi c p_t^2}{eH}.$$

Отсюда видно, что при изменении H тангенциальный импульс p_t меняется пропорционально $\sqrt{H}$. Что касается импульса p_z вдоль направления **H**, то если при изменении поля не возникает электрического поля, параллельного **H** (например, при изменении магнитного поля в соленоиде), он, очевидно, не меняется.

§ 21. Движение заряда в постоянных однородных электрическом и магнитном полях

Наконец, рассмотрим движение заряда в случае наличия одновременно электрического и магнитного полей, однородных и постоянных. Мы ограничимся при этом случаем, когда скорость заряда $v \ll c$, и потому его импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; как мы увидим ниже, для этого необходимо, чтобы электрическое поле было мало по сравнению с магнитным.

Направление **H** выберем за ось Z, а плоскость, проходящую через векторы **H** и **E**, за плоскость YZ. Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

напишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\dot{y}H, \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \\ m\ddot{z} &= eE_z. \end{aligned} \tag{21,1}$$

Из третьего из этих уравнений видно, что вдоль оси Z заряд движется равномерно-ускоренно, т. е.

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \tag{21,2}$$

Умножая второе из уравнений (21,1) на i и складывая с первым, находим

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

$\left(\omega = \frac{eH}{mc}\right)$. Интеграл этого уравнения, где $\dot{x} + i\dot{y}$ рассматривается как неизвестное, равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного интеграла уравнения с правой частью. Первый из них есть $ae^{-i\omega t}$, второй равен $\frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{H}$. Таким образом,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Постоянная a, вообще говоря, комплексная. Написав её в виде $a = be^{i\alpha}$ с действительными b и α, мы видим, что поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$, то, выбирая соответствующим образом начало отсчёта времени, мы можем придать фазе α любое значение. Выберем её так, чтобы a было действительно. Тогда, отделяя в $\dot{x}+i\dot{y}$ мнимую и действительную части, находим

$$\dot{x}=a\cos\omega t+c\frac{E_y}{H},\quad \dot{y}=-a\sin\omega t. \tag{21,3}$$

В момент времени $t=0$ скорость направлена по оси X.

Мы видим, что скорость частицы является периодической функцией времени. Среднее значение скорости легко найти, замечая, что среднее значение $\overline{\cos\omega t}=\overline{\sin\omega t}=0$:

$$\overline{\dot{x}}=\frac{cE_y}{H},\quad \overline{\dot{y}}=0. \tag{21,4}$$

Таким образом, средняя скорость в направлении оси Y равна нулю, а средняя скорость вдоль оси X, т. е. перпендикулярно к магнитному и электрическому полям, отлична от нуля.

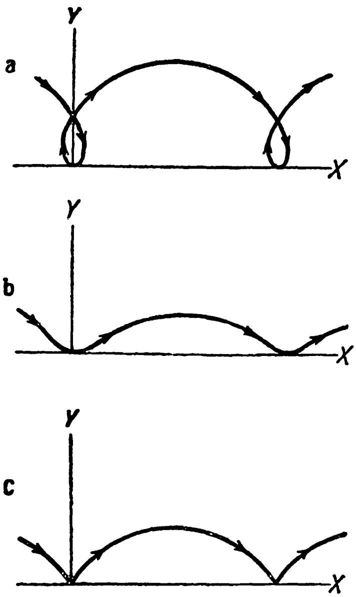

Рис. 3.

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света; мы видим [из (21,3) или (21,4)], что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

$$\frac{E_y}{H}\ll 1, \tag{21,5}$$

абсолютные же величины E_y и H могут быть произвольными.

Интегрируя ещё раз уравнения (21,3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при $t=0$ было $x=y=0$, получаем

$$\begin{aligned} x&=\frac{a}{\omega}\sin\omega t+\frac{cE_y}{H}t,\\ y&=\frac{a}{\omega}(\cos\omega t-1). \end{aligned} \tag{21,6}$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой, эти уравнения определяют собой так называемую трохоиду. В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина a, чем абсолютная величина $\frac{cE_y}{H}$, проекция траектории частицы на плоскость XY имеет вид, изображённый соответственно на рис. 3, a и рис. 3, b.

Если $a = -cE_y/H$, то (21,6) переходит в

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \sin\omega t), \quad v = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos\omega t), \tag{21,7}$$

т. е. проекция траектории на плоскость XY является циклоидой (рис. 3, с).

§ 22. Тензор электромагнитного поля

В § 15 мы вывели уравнения движения заряда в поле, исходя из функции Лагранжа (14,4), написанной в трёхмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия (14,1), написанного в четырёхмерных обозначениях.

Принцип наименьшего действия гласит

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c} A_i dx_i\right) = 0. \tag{22,1}$$

Замечая, что $ds = \sqrt{-dx_i}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S = \int \left[-mc\,\delta ds + \frac{e}{c}\delta(A_i dx_i)\right] = \int \left(mc\frac{dx_i\delta dx_i}{ds} + \frac{e}{c}A_i\delta dx_i + \right.$$

$$\left. + \frac{e}{c}\delta A_i \delta dx_i\right) = \int \left(mc\frac{dx_i d\delta x_i}{ds} + \frac{e}{c}A_i d\delta x_i + \frac{e}{c}\delta A_i dx_i\right) = 0.$$

Первые два члена в подинтегральном выражении проинтегрируем по частям. Кроме того, в первом члене подставим $\frac{dx_i}{ds} = u_i$, где u_i — компоненты 4-скорости. Тогда

$$\int \left(-mc\,du_i\delta x_i - \frac{e}{c}\delta x_i dA_i + \frac{e}{c}\delta A_i dx_i\right) + \left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x_i \Big| = 0. \tag{22,2}$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных пределах, т. е. на пределах $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Далее:

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k,$$

и поэтому

$$\int \left(-mc\,du_i\delta x_i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_i dx_k + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_i \delta x_k\right) = 0.$$

Напишем в первом члене $du_i = \frac{du_i}{ds}ds$, во втором и третьем $dx_i = u_i ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k

(это ничего не изменит, так как по значкам i и k производится суммирование). Тогда

$$\int \left[-mc\frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) u_k \right] \delta x_i ds = 0.$$

Ввиду произвольности δx_i отсюда следует, что подинтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) u_k. \tag{22,3}$$

Введём обозначение

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{22,4}$$

Тензор F_{ik} называется тензором электромагнитного поля. Уравнения движения (22,3) тогда принимают вид:

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \tag{22,5}$$

Эти четыре (для $i = 1, 2, 3, 4$) уравнения и являются уравнениями движения заряда в электромагнитном поле в четырёхмерном виде.

Из определения тензора F_{ik} следует, что

$$F_{ik} = -F_{ki}, \tag{22,6}$$

т. е. тензор электромагнитного поля антисимметричен. Поэтому $F_{ik} = 0$ при $i = k$.

Подставляя в (22,4) $A_{1,2,3} = A_{x,y,z}$, $A_4 = i\varphi$, легко находим следующие значения отдельных компонент тензора F_{ik}:

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0,$$

$$F_{12} = -F_{21} = H_z, \qquad F_{14} = -F_{41} = -iE_x,$$

$$F_{13} = -F_{31} = -H_y, \qquad F_{24} = -F_{42} = -iE_y,$$

$$F_{23} = -F_{32} = H_x, \qquad F_{34} = -F_{43} = -iE_z.$$

Это можно написать в виде таблицы:

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{22,7}$$

Таким образом, компоненты напряжённостей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля.

Из (22,7) видно, что пространственные компоненты тензора F_{ik} (т. е. компоненты с i, $k=1, 2, 3$) связаны с магнитным полем. Именно, компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$ образуют трёхмерный антисимметричный тензор 2-го ранга. Это значит, как известно, что вектор $\mathbf{H}$ есть аксиальный вектор (см. § 6).

Что касается компонент электрического поля $\mathbf{E}$, то они являются временными компонентами F_{ik} (одно из i или k равно 4). Вектор $\mathbf{E}$ есть, очевидно, обычный, т. е. полярный, вектор.

С помощью (22,7) и (7,2) легко убедиться в том, что первые три уравнения (22,5) тождественны с уравнением движения (15,5), а четвёртое — с уравнением (15,7). То, что соответственно этому только три из них независимы, можно легко обнаружить, непосредственно умножив обе части (22,5) на u_i. Тогда ввиду (7,6) и (22,6) обе части уравнения тождественно обратятся в нуль.

Если рассматривать в вариации δS только истинные траектории, то первый член в (22,2) тождественно равен нулю. Тогда второй член, в котором один из пределов рассматривается как переменный, даёт дифференциал действия как функцию от координат. Таким образом,

$$\delta S=\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x_i. \tag{22,8}$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=mcu_i+\frac{e}{c}A_i=p_i+\frac{e}{c}A_i. \tag{22,9}$$

4-вектор с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ есть 4-вектор обобщённого импульса частицы P_i. Пользуясь выражениями для составляющих 4-скорости и 4-потенциала, находим следующие выражения для компонент P_i:

$$P_\alpha=p_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha,\quad P_4=\frac{i}{c}(\mathscr{E}_{\text{кин}}+e\varphi), \tag{22,10}$$

где $\mathscr{E}_{\text{кин}}=mc^2\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Пространственные компоненты 4-вектора P_i образуют, как и следовало, трёхмерный вектор обобщённого импульса (14,5). Временная же компонента есть, как и в § 10, $i\mathscr{E}/c$, где $\mathscr{E}$ — полная энергия заряда в поле.

Ввиду того, что $u_i^2=-1$, имеем

$$\left(P_i-\frac{e}{c}A_i\right)^2=-m^2c^2 \tag{22,11}$$

— соотношение, совпадающее с (14,7). Заменяя P_i на $\frac{\partial S}{\partial x_i}$, получим уравнение Гамильтона-Якоби (14,11) в четырёхмерном виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\right)^2+m^2c^2=0. \tag{22,12}$$

Задачи

1. Определить движение заряда, движущегося со скоростью, сравнимой со скоростью света в параллельных электрическом и магнитном полях.

Решение. Выбирая ось Z вдоль направления полей, находим уравнения движения (21,4) в виде (вводим постоянную $\lambda = e/mc^2$):

$$\ddot{x} = \lambda H \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\lambda H \dot{x}, \quad \ddot{z} = cE\lambda \dot{t}, \quad c\ddot{t} = E\lambda \dot{z}$$

(точки над x, y, z, t означают здесь дифференцирование по s) с дополнительным условием $u_i^2 = \dot{x}_i^2 = -1$. Эта система распадается на две пары независимых уравнений. Интегрируя их и выбирая соответствующим образом произвольные постоянные (начало отчёта s, начало и направление осей X и Y), находим траекторию в параметрическом виде:

$$x = \frac{a}{\lambda H} \sin \lambda H s, \quad y = \frac{a}{\lambda H} \cos \lambda H s, \quad z = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E} \operatorname{ch} \lambda E s,$$

$$ct = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E} \operatorname{sh} \lambda E s$$

(a — произвольная постоянная). Отметим, что полученная траектория есть круговая спираль радиуса $a/\lambda H$.

2. То же во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях.

Решение. Выбирая ось Z по направлению $\mathbf{H}$, а ось Y по направлению $\mathbf{E}$, находим уравнения движения

$$\ddot{x} = \lambda H \dot{y}, \quad \ddot{y} = \lambda E c \dot{t} - \lambda H \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad c\ddot{t} = \lambda H \dot{y}.$$

Интегрируя эти уравнения (с дополнительным условием $u_i^2 = -1$) и выбирая соответствующим образом начало координат, найдём следующие параметрические уравнения траектории:

При $H > E$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{H^2 - E^2}} (\gamma H \sin \sigma + E \beta \sigma), \quad y = \gamma \cos \sigma, \quad z = \alpha \sigma,$$

$$ct = \frac{1}{\sqrt{H^2 - E^2}} (\gamma E \sin \sigma + H \beta \sigma),$$

причём постоянные α, β, γ связаны соотношением

$$\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = \frac{1}{\lambda^2 (H^2 - E^2)},$$

а параметр σ связан с s посредством $\sigma = s\lambda \sqrt{H^2 - E^2}$.

При $H < E$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{E^2 - H^2}} (\gamma H \operatorname{sh} \sigma + \beta E \sigma), \quad y = \gamma \operatorname{ch} \sigma, \quad z = \alpha \sigma,$$

$$ct = \frac{1}{\sqrt{E^2 - H^2}} (\gamma E \operatorname{sh} \sigma + \beta H \sigma),$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2 (E^2 - H^2)}.$$

При $E = H$:

$$x = \frac{\beta}{6}\sigma^3 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \frac{\lambda^2}{H^2}}{2\beta}\sigma, \quad y = \frac{\beta}{2}\sigma^2, \quad z = \alpha\sigma,$$

$$ct = \frac{\beta}{6}\sigma^3 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\lambda^2}{H^2}}{2\beta}\sigma,$$

где α, β — две независимые постоянные.

§ 23. Преобразование Лоренца для поля

В этом параграфе мы найдём формулы преобразования для поля, т. е. формулы, по которым можно определить поле в одной инерциальной системе отсчёта, зная это же поле в другой системе.

Формулы преобразования для потенциалов находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора (6,2). Помня, что компоненты вектора A_i суть $A_{x, y, z}$, $i\varphi$, легко находим

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{23,1}$$

Формулы преобразования для компонент тензора F_{ik} можно было бы найти по общей формуле (6,4) преобразования 4-тензоров. Проще, однако, поступить следующим образом. Вспомним, что переход от системы отсчёта K к системе K', движущейся относительно K вдоль оси X, эквивалентен повороту в плоскости $X\tau$ в четырёхмерном пространстве x, y, z, τ (см. § 4). Компоненты же тензора преобразуются как произведения двух соответствующих координат. Координаты $x_2 = y$ и $x_3 = z$ при этом преобразовании не меняются. По этой же причине не меняется и F_{23}:

$$F_{23} = F'_{23}. \tag{23,2}$$

Далее, опять-таки, поскольку координаты y и z не меняются, компоненты F_{12}, F_{13} и F_{42}, F_{43} преобразуются просто, соответственно, как координаты $x_1 = x$ и $x_4 = \tau$. Согласно формулам (6,4) легко находим:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{F'_{12} - i\frac{V}{c}F'_{42}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & F_{42} &= \frac{F'_{42} + i\frac{V}{c}F'_{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ F_{13} &= \frac{F'_{13} - i\frac{V}{c}F'_{43}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & F_{43} &= \frac{F'_{43} + i\frac{V}{c}F'_{13}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{23,3}$$

Для того чтобы определить преобразование компоненты F_{14}, заметим следующее: как известно, антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства (ср. в § 6 о тензорах e_{iklm} и $e_{\alpha\beta\gamma}$), остаётся инвариантным при вращении системы координат в этом пространстве. Вращение системы координат x, y, z, τ в плоскости $X\tau$ можно, очевидно, рассматривать как вращение двухмерной системы координат x, τ в двухмерном же пространстве. Тензор с составляющими $F_{11}=F_{44}=0$, $F_{14}=-F_{41}$ как раз является в этой системе тензором ранга, равного числу измерений. Поэтому при вращении в плоскости $X\tau$

$$F_{14}=F'_{14}. \tag{23,4}$$

Подставим теперь в (23,2) — (23,4) вместо компонент F_{ik} их выражения через компоненты полей **E** и **H** согласно (22,7). Мы находим тогда следующие формулы преобразования электрического поля:

$$E_x=E'_x,\quad E_y=\frac{E'_y+\frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad E_z=\frac{E'_z-\frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{23,5}$$

и для магнитного поля:

$$H_x=H'_x,\quad H_y=\frac{H'_y-\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad H_z=\frac{H'_z+\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{23,6}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля, как и большинство физических величин, относительны, т. е. их свойства различны в разных системах отсчёта. В частности, электрическое или магнитное поле может быть равно нулю в одной системе отсчёта и в то же время присутствовать в другой системе.

Формулы преобразования (23,5), (23,6) значительно упрощаются для случая $V \ll c$. С точностью до членов порядка V/c мы имеем тогда из (23,5) и (23,6):

$$E_x=E'_x,\quad E_y=E'_y+\frac{V}{c}H'_z,\quad E_z=E'_z-\frac{V}{c}H'_y;$$

$$H_x=H'_x,\quad H_y=H'_y-\frac{V}{c}E'_z,\quad H_z=H'_z+\frac{V}{c}E'_y.$$

Эти формулы могут быть написаны в векторном виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}'+\frac{1}{c}[\mathbf{H}'\mathbf{V}],\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}'-\frac{1}{c}[\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \tag{23,7}$$

Формулы обратного преобразования от K' к K получаются непосредственно из (23,5) — (23,7) изменением знака у V.

Если в системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'=0$, то, как легко убедиться на основании (23,5) и (23,6), между электрическим и магнитным полями в системе K существует соотношение

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\mathbf{VE}]. \tag{23,8}$$

Если же в K' поле $\mathbf{E}'=0$, то в системе K

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]. \tag{23,9}$$

В обоих случаях, следовательно, в системе K магнитные и электрические поля взаимно-перпендикулярны.

§ 24. Инварианты поля

Из компонент тензора электромагнитного поля можно составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Для нахождения всех таких инвариантов поступим аналогично тому, как определяются инварианты симметричного тензора второго ранга. Если A_{ik} есть такой тензор, то надо, как известно, приравнять нулю определитель

$$|A_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0.$$

Корни этого уравнения представляют собой главные значения симметричного тензора A_{ik} и являются его инвариантами; то же самое относится, очевидно, и к коэффициентам при различных степенях в этом уравнении, которые и выбираются обычно в качестве основных инвариантов.

Для антисимметричного тензора, каковым является тензор F_{ik}, операция приведения к диагональному виду не имеет, очевидно, смысла. Можно, однако, воспользоваться описанным способом для нахождения инвариантов такого тензора, причём, конечно, корни λ не будут обладать смыслом главных значений тензора.

Соответственно сказанному напишем уравнение

$$|F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0.$$

Легко видеть, что в нём будут присутствовать только члены с чётными степенями λ. Действительно, определитель не меняется при перестановке строк и столбцов. Кроме того, определитель чётного ранга не изменится при изменении знака всех величин. Поэтому ввиду антисимметричности F_{ik}

$$|F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=|F_{ki}-\lambda\delta_{ki}|=|-F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=|F_{ik}+\lambda\delta_{ik}|.$$

Соответственно этому в уравнении для λ будет только два отличных от нуля коэффициента — при λ^2 и при λ^4, т. е. антисимметричный тензор 2-го ранга характеризуется всего двумя инвариантами.

Подставляя выражения (22,7) для компонент тензора F_{ik}, без труда раскрываем определитель и находим

$$\lambda^4 + \lambda^2 (H^2 - E^2) - (\mathbf{HE})^2 = 0$$

(при раскрытии определителя удобно выбрать оси координат таким образом, чтобы одна из осей, скажем ось Z, была направлена вдоль $\mathbf{H}$, а вектор $\mathbf{E}$ лежал бы в плоскости YZ). Таким образом, инвариантами являются величины

$$H^2 - E^2 = \text{invar}, \tag{24,1}$$

$$\mathbf{EH} = \text{invar}. \tag{24,2}$$

Приведённый вывод показывает, что эти два инварианта являются единственными независимыми. Всякий другой инвариант может быть написан как функция этих двух.

Инварианты (24,1) и (24,2), написанные в четырёхмерной форме, имеют, как легко убедиться, следующий вид:

$$F_{ik}^2, \tag{24,3}$$

$$e_{iklm} F_{ik} F_{lm}, \tag{24,4}$$

где e_{iklm} есть совершенно антисимметричный единичный тензор 4-го ранга (см. § 6).

Необходимо отметить, что величина $e_{iklm} F_{ik} F_{lm}$ (или, иначе, $\mathbf{EH}$), строго говоря, является не скаляром, а псевдоскаляром; это видно как из его четырёхмерного написания (произведение тензора F_{ik} на дуальный ему тензор, см. § 6), так и из трёхмерного (произведение аксиального вектора $\mathbf{H}$ на полярный вектор $\mathbf{E}$). Истинным скаляром является $(\mathbf{EH})^2$.

Из инвариантности приведённых двух выражений вытекают следующие выводы. Если в какой-нибудь системе отсчёта электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т. е. $\mathbf{EH} = 0$, то они перпендикулярны и во всякой другой инерциальной системе отсчёта [в силу (24,2)]. Если в какой-нибудь системе отсчёта абсолютные величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равны друг другу, то они одинаковы и в любой другой системе [в силу (24,1)].

Имеют, очевидно, место также и следующие неравенства. Если в какой-нибудь системе отсчёта $E > H$ (или $E < H$), то и во всякой другой системе будет $E > H$ (или $E < H$). Если в какой-либо системе отсчёта вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ образуют острый (или тупой) угол, то они будут образовывать острый (или тупой) угол и во всякой другой системе.

Преобразованием Лоренца можно всегда достичь того, чтобы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получили любые значения, удовлетворяющие только условию, чтобы $E^2 - H^2$ и $\mathbf{EH}$ имели заданные определённые значения. В частности, можно всегда найти такую инерциальную систему отсчёта, в которой электрическое и магнитное поля в данной точке параллельны друг другу. В этой системе $\mathbf{EH} = EH$ и из двух уравнений

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_0\mathbf{H}_0$$

можно найти значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в этой системе отсчёта ($\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — электрическое и магнитное поля в исходной системе отсчёта).

Исключением является случай, когда оба инварианта равны нулю. В этом случае $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех системах отсчёта равны и взаимно перпендикулярны.

Если $\mathbf{EH} = 0$, то можно всегда найти такую систему отсчёта, в которой $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$ (смотря по тому $E^2 - H^2 <$ или > 0), т. е. поле или чисто электрическое, или чисто магнитное. Наоборот, если в какой-нибудь системе отсчёта $\mathbf{E} = 0$ или $\mathbf{H} = 0$, то во всякой другой системе они будут взаимно перпендикулярны.

Задача

Определить скорость системы отсчёта, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.

Решение. Систем отсчёта K', удовлетворяющих поставленному условию, существует бесконечное множество — если найдена одна из них, то тем же свойством будет обладать и любая другая система, движущаяся относительно первой со скоростью, направленной вдоль общего направления полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Поэтому достаточно определить ту из этих систем, скорость которой перпендикулярна обоим полям. Выбирая направление скорости в качестве оси x и воспользовавшись тем, что в системе K': $E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$, получим, с помощью формул (23,5) и (23,6), для скорости $\mathbf{V}$ системы K' относительно исходной системы следующее уравнение:

$$\frac{\mathbf{V}/c}{1 - V^2/c^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{E^2 + H^2}$$

(из двух корней квадратного уравнения должен, разумеется, быть выбран тот, для которого $V < c$).

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

§ 25. Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ [(15,3) и (15,4)] для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ легко получить уравнения для этих полей, т. е. соотношения, содержащие только $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Мы должны при этом исключить из выражений для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Для этого определим $\operatorname{rot} \mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi.$$

Но ротор всякого градиента равен нулю, а $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{25,1}$$

Беря дивергенцию от обеих частей уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{25,2}$$

Уравнения (25,1) и (25,2) называются первой парой уравнений Максвелла[1]. Заметим, что эти два уравнения ещё не определяют вполне свойства поля. Это видно из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем $\left(\text{производную } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$, но не определяют производной $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Уравнения (25,1) и (25,2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H} \, dV = \oint \mathbf{H} \, d\mathbf{f},$$

где интеграл справа берётся по всей замкнутой поверхности, охваты-

[1]) Уравнения Максвелла — основные уравнения электродинамики — были впервые сформулированы им в 1860-х годах.

вающей объём, по которому взят интеграл слева. На основании (25,2) мы имеем

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathfrak{f} = 0. \tag{25,3}$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется потоком вектора через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathfrak{f} = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l},$$

где интеграл справа берётся по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (25,1) мы находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\, d\mathfrak{f}. \tag{25,4}$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется циркуляцией этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также электродвижущей силой в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Уравнения Максвелла (25,1) и (25,2) можно написать и в четырёхмерных обозначениях. На основании определения тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

легко убедиться, что

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{25,5}$$

При $i = k = l$ это уравнение выполняется тождественно (так как $F_{ik} = 0$ при $i = k$). При одинаковых двух из i, k, l это уравнение тривиально в силу антисимметричности F_{ik}. Остальные четыре уравнения (при $i \neq k \neq l$), как легко убедиться, подставляя выражения (22,7) для F_{ik}, являются не чем иным, как уравнениями (25,1) и (25,2). Таким образом, (25,5) есть первая пара уравнений Максвелла, написанная в четырёхмерных обозначениях.

§ 26. Действие для электромагнитного поля

Действие S для всей системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нём частицами, должно состоять из трёх частей:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \tag{26,1}$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц. Эта часть, очевидно, есть не что иное, как действие для свободных частиц, т. е. для частиц в отсутствии поля. Действие для свободной частицы есть, как мы знаем, $-mc\int ds$ [см. (9,1)]. Если имеется несколько частиц, то их общее действие равно сумме действий для каждой частицы в отдельности. Таким образом,

$$S_m = -\sum mc \int ds. \tag{26,2}$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Как мы видели в § 14, она имеет вид $\frac{e}{c}\int A_k dx_k$ или, в случае нескольких частиц,

$$S_{mf} = \sum \frac{e}{c} \int A_k dx_k. \tag{26,3}$$

В каждом из членов этой суммы A_k есть потенциал поля в той точке пространства и времени, в которой находится соответствующая частица. Сумма $S_m + S_{mf}$ есть уже известное нам действие (14,1) для заряда в поле, которое мы писали раньше просто как S.

Наконец, S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т. е. S_f есть действие для поля в отсутствии зарядов. До тех пор, пока мы интересовались только движением зарядов в заданном электромагнитном поле, S_f, как не зависящее от частиц, нас не интересовало, так как этот член не мог повлиять на уравнения движения частицы. Он делается, однако, необходимым, когда мы хотим найти уравнения, определяющие само поле. Этому соответствует то обстоятельство, что из части $S_m + S_{mf}$ действия мы нашли только два уравнения поля: (25,1) и (25,2), которые ещё недостаточны для полного определения поля.

Для установления вида действия поля S_f мы будем исходить из следующего весьма важного свойства электромагнитных полей. Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому принципу суперпозиции. Этот принцип заключается в том, что если один заряд создаёт одно поле, а другой — другое, то поле, создаваемое обоими зарядами вместе, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряжённости результирующего поля в каждой точке равны сумме (векторной) напряжённостей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции, сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

Из сказанного следует, что под знаком интеграла в действии S_f должно стоять выражение, квадратичное по полю. Только в этом случае уравнения поля будут линейными, — уравнения поля получаются варьированием действия, а при варьировании степень подинтегрального выражения понижается на единицу.

В выражение для действия S_f не могут входить потенциалы поля, так как они не определены однозначно (в S_{mf} эта неоднозначность была не существенна). Поэтому S_f должно быть интегралом некоторой функции от тензора электромагнитного поля F_{ik} [1]). Но действие должно быть скаляром и потому должно быть интегралом от некоторого скаляра. К тому же, как было выше отмечено, этот скаляр, стоящий под знаком интеграла, должен быть квадратичным по F_{ik}.

Но существует всего только один скаляр второй степени, который можно составить из F_{ik} (§ 24); им является F_{ik}^2 (величина $e_{iklm}F_{ik}F_{lm}$ есть псевдоскаляр).

Таким образом, S_f должно иметь вид:

$$S_f = a \int \int F_{ik}^2 dV\, dt, \quad dV = dx\, dy\, dz,$$

где интеграл берётся по координатам по всему пространству, а по времени — между двумя заданными моментами; a есть некоторая постоянная. Под интегралом стоит $F_{ik}^2 = 2(H^2 - E^2)$. Поле $\mathbf{E}$ содержит производную $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$; но легко видеть, что $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ должно входить в действие с положительным знаком (а потому и E^2 с положительным знаком). Действительно, если бы $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ входило в S_f со знаком минус, то достаточно быстрым изменением потенциала со временем (в рассматриваемом интервале времени) всегда можно было бы сделать $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ сколь угодно большим, а S_f — отрицательной величиной со сколь угодно большим абсолютным значением. S_f не могло бы, следовательно, иметь минимума, как этого требует принцип наименьшего действия. Таким образом, a должно быть отрицательным.

---

[1]) Подинтегральная функция в S_f не должна содержать производных от F_{ik}, так как функция Лагранжа может содержать кроме координат системы только их первые производные по времени, а роль координат (т. е. переменных, по которым производится варьирование в принципе наименьшего действия) играют в этом случае потенциалы A_k поля; это аналогично тому, что в механике функция Лагранжа для механической системы содержит только координаты частиц и их первые производные по времени.

Численное значение a зависит от выбора единиц для измерения поля. Заметим, что после выбора определённого значения a вместе с единицами для измерения поля определяются также и единицы для измерения всех остальных электромагнитных величин.

Мы будем в дальнейшем пользоваться так называемой гауссовой системой единиц; в этой системе a есть безразмерная величина, равная $-1/16\pi$.

Наряду с гауссовой системой единиц пользуются также и так называемой системой Хевисайда, в которой $a = -{}^1/_4$. В этой системе единиц имеют более удобный вид уравнения поля (в них не входит тогда π), но зато π входит в закон Кулона. Напротив, в гауссовой системе единиц уравнения поля содержат π, а закон Кулона имеет простой вид.

Таким образом, действие для поля имеет вид

$$S_f = \frac{i}{16c\pi}\int F_{ik}^2 d\Omega, \qquad d\Omega = dx\,dy\,dz\,d\tau. \tag{26,4}$$

При этом мы написали $d\Omega$ вместо $dV\,dt$ и потому разделили всё выражение ещё на ic. В трёхмерном виде

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int\int (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{26,5}$$

Другими словами, функция Лагранжа для поля есть

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{26,6}$$

Действие для поля вместе с находящимися в нём зарядами имеет вид

$$S = -\sum\int mc\,ds + \sum\int \frac{e}{c}A_k dx_k + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega. \tag{26,7}$$

Заметим, что теперь уже заряды отнюдь не считаются малыми, как при выводе уравнений движения заряда в заданном поле. Поэтому A_k и F_{ik} относятся к истинному полю, т. е. внешнему полю вместе с полем, созданным самими зарядами; A_k и F_{ik} зависят теперь от положения и скорости зарядов.

§ 27. Четырёхмерный вектор тока

До сих пор мы всегда рассматривали только точечные заряды. Все имеющиеся в природе заряды и являются в действительности точечными, ибо, как мы видели в § 8, всякая элементарная частица должна рассматриваться как точка, а всякая сложная частица состоит из отдельных элементарных.

Однако в целях математического удобства часто рассматривают заряд как распределённый в пространстве непрерывным образом. Тогда можно ввести «плотность заряда» ρ так, что ρdV есть заряд, находящийся в объёме dV; ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл $\int \rho\, dV$ по некоторому объёму есть заряд, находящийся в этом объёме.

При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде, кроме тех точек, где находятся точечные заряды, а интеграл $\int \rho\, dV$ должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объёме. Поэтому ρ можно написать с помощью δ-функций[1]) в следующем виде:

$$\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{27,1}$$

где сумма берётся по всем имеющимся зарядам, а $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор заряда e_A. Эта функция согласно свойствам δ-функции действительно равна нулю везде, кроме точек $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$, а интеграл

$$\int \rho\, dV = \sum_A e_A,$$

где справа стоит сумма всех зарядов, находящихся в данном объёме.

---

[1]) δ-функция $\delta(x)$ определяется следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех не равных нулю значениях x; при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, причём так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Из этого определения вытекают следующие свойства: если $f(x)$ — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a)\, dx = f(a);$$

в частности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x)\, dx = f(0)$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть $\pm\infty$ областью интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку в которой δ-функция не исчезает).

Приведём ещё два равенства с δ-функциями; смысл этих равенств заключается в том, что их левая и правая части дают одинаковые результаты, если их применять в качестве множителей под знаком интегрирования:

$$\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x).$$

Подобно тому как $\delta(x)$ определена для одной переменной x, можно ввести трёхмерную δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$, равную нулю везде, кроме начала трёхмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. В качестве такой функции можно, очевидно, взять произведение $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы отсчёта. Напротив, плотность ρ не есть, вообще говоря, инвариант,—инвариантом является лишь произведение $\rho\, dV$.

Умножим равенство $de = \rho\, dV$ с обеих сторон на dx_i:

$$de\, dx_i = \rho\, dV dx_i = \rho\, dV dt \frac{dx_i}{dt}.$$

Слева стоит 4-вектор (так как de есть скаляр, а dx_i — 4-вектор). Значит, и справа должен стоять 4-вектор. Но $dV dt$ надо рассматривать как скаляр (см. § 6), а потому $\rho \frac{dx_i}{dt}$ есть 4-вектор. Этот вектор (обозначим его через j_i) носит название 4-вектора тока:

$$j_i = \rho \frac{dx_i}{dt}. \qquad (27,2)$$

Три первые компоненты этого вектора образуют обычный пространственный вектор с составляющими $\rho \frac{dx}{dt}$, $\rho \frac{dy}{dt}$, $\rho \frac{dz}{dt}$, т. е. вектор

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \qquad (27,3)$$

$\mathbf{v}$ есть скорость заряда в данной точке. Вектор $\mathbf{j}$ называется вектором плотности тока. Четвёртая составляющая 4-вектора тока есть $ic\rho$. Таким образом,

$$j_{1,2,3} = j_{x,y,z}, \quad j_4 = ic\rho. \qquad (27,4)$$

Полный заряд, находящийся во всём пространстве, как уже указывалось, равен интегралу $\int \rho dV$ по всему пространству. Мы можем написать этот интеграл в четырёхмерном виде:

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{ic} \int j_4 dV = \frac{1}{ic} \int j_i dS_i, \qquad (27,5)$$

где интегрирование производится по всей четырёхмерной гиперплоскости, перпендикулярной к оси x_4 (очевидно, что такое интегрирование и означает интегрирование по всему трёхмерному пространству).

Вообще, интеграл $\frac{1}{ic} \int j_i dS_i$, взятый по любой гиперповерхности, есть, очевидно, сумма зарядов, мировые линии которых пересекают эту гиперповерхность.

Введём 4-вектор тока в выражение (26,7) для действия. Именно, преобразуем второй член в этом выражении. Согласно сказанному в настоящем параграфе мы можем ввести вместо точечных зарядов e непрерывное распределение зарядов с плотностью ρ. Тогда, очевидно, вместо приведённого выражения мы должны написать $\frac{1}{c} \int \rho A_i dx_i dV$, заменив сумму по зарядам интегралом ко всему объёму. Переписав его в виде $\frac{1}{c}\int\rho\frac{dx_i}{dt}A_i\,dV\,dt$, мы видим, что этот член равен

$$-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i d\Omega.$$

Таким образом, действие S принимает вид

$$S=-\sum\int mc\,ds-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i\,d\Omega+\frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega. \qquad (27,6)$$

§ 28. Уравнение непрерывности

Полный заряд, находящийся в некотором объёме, равен интегралу $\int\rho\,dV$ по этому объёму. Изменение этого заряда со временем определяется производной $\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\,dV$.

С другой стороны, это изменение, например, за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за единицу времени из данного объёма наружу, или, наоборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей наш объём, равно $\rho\mathbf{v}\,d\mathbf{f}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{f}$. Вектор $d\mathbf{f}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объёма. Поэтому $\rho\mathbf{v}\,d\mathbf{f}$ положительно, если заряд выходит из нашего объёма, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объёма, есть, следовательно, $\oint\rho\mathbf{v}\,d\mathbf{f}$, где интеграл распространён по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объём.

Из сравнения обоих полученных выражений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV=-\oint\rho\mathbf{v}\,d\mathbf{f}. \qquad (28,1)$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объёме увеличивается. Уравнение (28,1) есть так называемое уравнение непрерывности, выражающее собой закон сохранения заряда, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho\mathbf{v}$ есть плотность тока [см. (27,3)], можно переписать (28,1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\,dV=-\int\mathbf{j}\,d\mathbf{f}. \qquad (28,2)$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Для этого применим к правой части (28,2) теорему Гаусса:

$$\oint\mathbf{j}\,d\mathbf{f}=\int\operatorname{div}\mathbf{j}\,dV.$$

Подставляя это в (28, 2), находим $\int\left(\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV=0$. Поскольку это должно иметь место при интегрировании по любому объёму, то подинтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{28,3}$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.

Легко убедиться в том, что выражение (27,1) для ρ в виде δ-функций автоматически удовлетворяет уравнению (28,3). Для простоты предположим, что имеется всего лишь один заряд, так что

$$\rho=e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Ток $\mathbf{j}$ есть тогда

$$\mathbf{j}=e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}$ — скорость заряда. Найдём производную $\frac{\partial\rho}{\partial t}$. При движении заряда меняются его координаты, т. е. меняется $\mathbf{r}_0$. Поэтому

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0}\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Но $\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t}$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}$ заряда. Далее, поскольку ρ есть функция от $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}_0}=-\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathbf{v}\operatorname{grad}\rho=-\operatorname{div}\rho\mathbf{v}$$

(скорость $\mathbf{v}$ заряда не зависит, конечно, от $\mathbf{r}$). Таким образом, мы приходим к уравнению (28,3).

В четырёхмерном виде уравнение непрерывности (28,3) приобретает, как легко проверить, вид:

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i}=0. \tag{28,4}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что полный заряд, находящийся во всём пространстве, может быть написан в виде $\frac{1}{ic}\int j_i\,dS_i$, где интегрирование производится по гиперплоскости $x_4=\mathrm{const}$. В другой момент времени полный заряд изобразится таким же интегралом, взятым по другой гиперплоскости, перпендикулярной к оси x_4. Легко проверить, что уравнение (28,4) действительно приводит к закону сохранения заряда, т. е. к тому, что интеграл $\int j_i\,dS_i$ одинаков, по какой бы гиперплоскости $x_4=\mathrm{const}$ мы ни интегрировали. Разность между интегралами $\int j_i dS_i$, взятыми по двум таким гиперплоскостям, можно написать в виде $\oint j_i dS_i$, где интеграл берётся по всей замкнутой гиперплоскости, охватывающей 4-объём между двумя рассматриваемыми гиперплоскостями (этот интеграл отличается от искомой разности интегралом по бесконечно удалённой «боковой» гиперповерхности, который, однако, исчезает, так как на бесконечности нет зарядов). С помощью теоремы Гаусса (6,11) можно преобразовать этот интеграл по 4-объёму между двумя гиперплоскостями и, воспользовавшись (28,4), убедиться, что

$$\oint j_i dS_i = \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i} d\Omega = 0, \tag{28,5}$$

что и требовалось доказать.

Приведённое доказательство остаётся, очевидно, в силе и для двух интегралов $\int j_i dS_i$, в которых интегрирование производится по любым двум бесконечным гиперповерхностям (а не только по гиперплоскостям $x_4 = \text{const.}$), включающим в себе всё (трёхмерное) пространство. Отсюда видно, что интеграл $\int j_i dS_i$ действительно имеет одно и то же значение (равное полному заряду в пространстве), по какой бы такой гиперповерхности ни производилось интегрирование.

§ 29. Вторая пара уравнений Максвелла

При нахождении уравнений поля с помощью принципа наименьшего действия мы должны считать заданным движение зарядов и должны варьировать только поле, т. е. потенциалы; при нахождении уравнений движения мы, наоборот, считали поле заданным и варьировали траекторию частицы.

Поэтому вариация первого члена в (27,6) равна нулю, а во втором не должен варьироваться ток j_i. Таким образом,

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{ic^2} j_i \delta A_i - \frac{1}{16\pi ic} \delta (F_{ik}^2) \right) d\Omega = \int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta F_{ik} \right\} d\Omega = 0 .$$

Подставляя $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, имеем

$$\delta S = \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \right\} d\Omega =$$
$$= \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим

$$\delta S = \int \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right\} d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берём по частям, т. е., иначе говоря, применяем теорему Гаусса:

$$\delta S = \frac{1}{ic}\int\left\{\frac{1}{c}j_i - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right\}\delta A_i d\Omega + \frac{1}{4\pi ic}\int F_{ik}\,\delta A_i dS_k\Big| . \qquad (29,1)$$

Во втором члене мы должны взять его значение на пределах интегрирования. Пределами интегрирования по координатам является бесконечность (так как интегрируется по всему полю), где поле равно нулю. На пределах же интегрирования по времени, т. е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, так как по смыслу принципа наименьшего действия поле в эти моменты задано. Таким образом, второй член в (29,1) равен нулю, и мы находим

$$\frac{1}{ic}\int\left(\frac{1}{c}j_i - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right)\delta A_i d\Omega = 0.$$

Ввиду того, что по смыслу принципа наименьшего действия вариации δA_i произвольны, нулю должен равняться коэффициент при δA_i, т. е.

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}j_i. \qquad (29,2)$$

Эти четыре ($i = 1, 2, 3, 4$) уравнения и есть вторая пара уравнений Максвелла, написанная в четырёхмерной форме. Напишем эти уравнения в трёхмерной форме. Первое из них ($i = 1$) есть

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial F_{14}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}j_1.$$

Подставляя значения составляющих тензора F_{ik} из (22,7), находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}j_x.$$

Вместе с двумя следующими ($i = 2, 3$) уравнениями они могут быть записаны как одно векторное

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \qquad (29,3)$$

Наконец, четвёртое уравнение ($i = 4$) даёт

$$\frac{\partial iE_x}{\partial x} + \frac{\partial iE_y}{\partial y} + \frac{\partial iE_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}ic\rho,$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (29,4)$$

Уравнения (29,3) и (29,4) и есть вторая пара уравнений Максвелла, написанная в векторных обозначениях[1]). Вместе с первой парой

[1]) Уравнения Максвелла в форме, применимой к электромагнитному полю в пустоте вместе с находящимися в нём точечными зарядами, были сформулированы Лоренцом.

уравнений Максвелла они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей, или, как говорят, электродинамики.

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (29,4) по некоторому объёму и применяя теорему Гаусса

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f},$$

находим

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\, dV. \tag{29,5}$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объёме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (29,3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l},$$

находим

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E}\, d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \tag{29,6}$$

Величину

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{29,7}$$

называют «током смещения». Из (29,6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}\right) d\mathbf{f}, \tag{29,8}$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Из уравнений Максвелла можно получить известное уже нам уравнение непрерывности (28,3). Беря с обеих сторон (29,3) дивергенцию, находим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

Но $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, согласно (29,4). Таким образом, мы приходим снова к уравнению (28,3). В четырёхмерном виде из (29,2) мы имеем:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

Но в силу антисимметричности тензора F_{ik} имеем, подставляя $F_{ik} = -F_{ki}$ и меняя затем обозначения индексов:

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_k \partial x_i},$$

откуда следует, что $\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$, и мы приходим к уравненик непрерывности (28,4), написанному в четырёхмерном виде.

§ 30. Плотность энергии и вектор Пойнтинга

Умножим обе части уравнения (29,3) на **E**, а обе части уравнения (25,1) на **H** и сложим полученные уравнения почленно. Тогда мы будем иметь

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - (\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - \operatorname{div}[\mathbf{EH}]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{30,1}$$

Вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{30,2}$$

носит название вектора Пойнтинга.

Проинтегрируем (30,1) по некоторому объёму и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,dV = -\int \mathbf{jE}\,dV - \oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{30,3}$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\int \mathbf{jE}\,dV$ в виде суммы $\sum e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (15,7)

$$e\mathbf{vE} = \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{\text{кин}}$$

$\left(\text{где } \mathscr{E}_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$. Тогда (30,3) переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = 0. \tag{30,4}$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нём частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя) всех частиц; первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \tag{30,5}$$

мы можем поэтому назвать «плотностью энергии» электромагнитного поля; это есть энергия единицы объёма поля.

При интегрировании по некоторому конечному объёму поверхностный интеграл в (30,3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\, dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\, d\mathbf{f}, \tag{30,6}$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объёме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл $\oint \mathbf{S}\, d\mathbf{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объём, так что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока, — количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности[1]).

§ 31. Тензор энергии-импульса

В предыдущем параграфе мы вывели выражение для энергии электромагнитного поля. Выведем это выражение, вместе с выражением для импульса поля, в четырёхмерной форме. При этом мы будем для простоты рассматривать пока электромагнитное поле без зарядов. Имея в виду дальнейшее применение (к гравитационным полям), а также упрощение выкладок, мы проделаем вывод в общем виде, не специализируя конкретного рода системы. Именно рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) dV\, dt = \frac{1}{ic}\int \Lambda\, d\Omega, \tag{31,1}$$

где Λ — некоторая функция от величин q, определяющих систему, и их производных по координатам и времени (для электромагнитного поля величинами q являются компоненты 4-потенциала); для краткости

---

[1]) Мы предполагаем, что на самой поверхности рассматриваемого объёма в данный момент времени нет частиц. В противном случае в правой стороне равенства должен был бы стоять также и поток энергии, переносимой пересекающими поверхность частицами.

мы пишем здесь всего одну такую величину q. Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda dV$ есть функция Лагранжа системы, так что Λ можно рассматривать как «плотность» функции Лагранжа. Математическим выражением замкнутости системы является то, что Λ не зависит явно от x_i, подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени.

«Уравнения движения» (т. е. уравнение поля, если речь идёт о каком-либо поле) получаются согласно принципу наименьшего действия путём варьирования S. Имеем $\left(\text{для краткости обозначаем } q_{,i} \equiv \frac{\partial q}{\partial x_i}\right)$:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i}\right) d\Omega =$$
$$= \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right] d\Omega = 0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, и мы находим тогда следующие «уравнения движения»:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \qquad (31,2)$$

(везде, конечно, подразумевается суммирование по дважды повторяющемуся индексу i).

Дальнейший вывод аналогичен тому, который производится в механике для вывода закона сохранения энергии. Именно, пишем:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}.$$

Подставляя сюда (31,2) и замечая, что $\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}$, находим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

С другой стороны, можно написать $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}$, так что

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i}\right).$$

Вводя обозначение

$$T_{ik} = \delta_{ik}\Lambda - q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}, \qquad (31,3)$$

можно написать полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \qquad (31,4)$$

Заметим, что если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (31,3) надо, очевидно, писать

$$T_{ik} = \delta_{ik}\Lambda - \sum_l q^{(l)}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}}. \tag{31,5}$$

Но в § 28 мы видели, что уравнение вида $\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0$, т. е. равенство нулю 4-дивергенции вектора, эквивалентно утверждению, что сохраняется интеграл от этого вектора по гиперповерхности $\int A_k dS_k$, заключающей в себе всё трёхмерное пространство. Очевидно, что аналогичное обстоятельство имеет место и для дивергенции тензора; уравнение $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$ равносильно утверждению, что сохраняется вектор P_i, компоненты которого равны интегралам от T_{ik} по гиперповерхности:

$$P_i = \text{const.} \int T_{ik} dS_k.$$

Этот вектор и должен быть отождествлён с 4-вектором импульса системы. Постоянный множитель перед интегралом мы выберем так, чтобы четвёртая компонента вектора P_i, в соответствии с прежним определением, была равна энергии системы, умноженной на i/c. Для этого заметим, что P_4 можно написать в виде

$$P_4 = \text{const.} \int T_{4k} dS_k = \text{const.} \int T_{44} dV,$$

если интегрирование производить по гиперплоскости $x_4 = \text{const}$. С другой стороны, согласно (31,3) имеем

$$T_{44} = -\dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} + \Lambda \quad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Эта величина в соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, должна быть рассматриваема как плотность энергии системы, и поэтому $-\int T_{44} dV$ есть полная энергия системы. Таким образом, мы должны положить $\text{const} = -i/c$, и мы получаем окончательно для 4-импульса системы выражение

$$P_i = -\frac{i}{c}\int T_{ik} dS_k. \tag{31,6}$$

Тензор T_{ik} называется тензором энергии-импульса системы.

Необходимо заметить, что определение тензора T_{ik} по существу не однозначно. Действительно, к тензору T_{ik}, определённому равенством (31,3), можно прибавить величину вида $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, где ψ_{ikl} — любой тензор, антисимметричный по индексам k, l. При такой замене новый тензор T_{ik} тоже будет удовлетворять уравнению (31,4), так как мы имеем тождественно $\frac{\partial^2\psi_{ikl}}{\partial x_k \partial x_l}=0$. Полный 4-импульс системы P_i при этом вообще не изменится, так как согласно (6,12) мы можем написать

$$\int \frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x_l} dS_k = \frac{1}{2}\int \left(dS_k \frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x_l} - dS_l \frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x_k}\right) = \int \psi_{ikl} df_{kl},$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной), «огибающей» гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трёхмерного пространства, и поскольку поле или частицы на бесконечности отсутствуют, этот интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и должно быть, величиной, определённой однозначно. Для однозначного определения тензора T_{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы 4-тензор момента импульса (см. § 13) системы выражался через 4-импульс посредством

$$M_{ik} = \int (x_i dP_k - x_k dP_i) = -\frac{i}{c}\int (x_i T_{kl} - x_k T_{il})\, dS_l, \qquad (31,7)$$

т. е. так, чтобы не только весь момент системы, но и его «плотность» выражались через «плотность» импульса по обычной формуле.

Легко определить, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса. Для этого заметим, что закон сохранения момента может быть выражен, как мы уже знаем, равенством нулю дивергенции подинтегрального выражения в M_{ik}. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = 0.$$

Замечая, что $\frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta_{il}$ и что $\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = 0$, находим отсюда

$$\delta_{il} T_{kl} - \delta_{kl} T_{il} = T_{ki} - T_{ik} = 0,$$

или

$$T_{ik} = T_{ki}, \qquad (31,8)$$

т. е. тензор энергии-импульса должен быть симметричным.

Заметим, что T_{ik}, определённый формулой (31,4), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым путём прибавления выражения вида $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ с соответствующим ψ_{ikl}.

В дальнейшем (§ 93) мы увидим, что существует способ непосредственного получения симметричного тензора T_{ik}. Как уже упоминалось выше, если производить интегрирование в (31,6) по гиперплоскости $x_4 = \text{const.}$, то P_i приобретает вид

$$P_i = -\frac{i}{c}\int T_{i4}dV, \tag{31,9}$$

где интегрирование производится по всему пространству (трёхмерному). Поскольку пространственные компоненты P_i образуют трёхмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть умноженная на i/c её энергия, то компоненты $\left(-\frac{i}{c}T_{\alpha 4}\right)$ можно назвать «плотностью импульса», а $(-T_{44})$ — «плотностью энергии» (т. е. соответственно импульсом и энергией единицы объёма).

Для выяснения смысла остальных компонент T_{ik} напишем уравнение сохранения (31,4) в трёхмерном виде

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial T_{44}}{\partial t} + \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{ic}\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{31,10}$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объёму V пространства. Из первого имеем

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}dV + \int\frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha}dV = 0,$$

или, преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}dV = ic\oint T_{4\alpha}df_\alpha, \tag{31,11}$$

где интеграл справа берётся по поверхности, огибающей объём V. Слева стоит скорость изменения энергии, находящейся в объёме V; отсюда видно, что выражение, стоящее справа, есть количество энергии, протекающей через границу объёма V, а $-icT_{4\alpha}$ есть плотность этого потока — количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2.

Из второго уравнения находим аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int(-T_{\alpha\nu})dV = -\oint T_{\alpha\beta}df_\beta. \tag{31,12}$$

Слева стоит изменение импульса системы в объёме V в единицу времени; поэтому $\oint T_{\alpha\beta}df_\beta$ есть количество импульса, вытекающее в единицу времени из объёма V. Таким образом, $T_{\alpha\beta}$ есть плотность потока импульса. Плотность потока энергии есть вектор, плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $T_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_β).

§ 32. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим теперь полученные в предыдущем параграфе общие соотношения к электромагнитному полю. Для электромагнитного поля величина, стоящая под знаком интеграла (31,1), равна согласно (26,4)

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl}^2 = -\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)^2.$$

Величинами q являются компоненты 4-потенциала поля A_k. Подставляя это в определение (31,5) тензора T_{ik}, имеем

$$T_{ik} = -\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} + \delta_{ik}\Lambda.$$

Для вычисления стоящей здесь производной от Λ напишем вариацию $\delta\Lambda$. Имеем

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right) = -\frac{1}{8\pi}F_{kl}\left(\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \delta\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right),$$

или, переставляя индексы и пользуясь тем, что $F_{kl} = -F_{lk}$:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi}F_{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

Отсюда мы видим, что

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)} = -\frac{1}{4\pi}F_{kl},$$

и поэтому

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}F_{kl} - \frac{1}{16\pi}\delta_{ik}F_{lm}^2.$$

Для того чтобы сделать это выражение симметричным по индексам i и k, прибавим к нему член $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl}$; этот член имеет вид производной $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$, так как

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l} - A_i\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \frac{\partial A_i F_{kl}}{\partial x_l}$$

[согласно уравнениям Максвелла (29,2) в местах, где нет зарядов, $\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = 0$], а потому, как было выяснено в предыдущем параграфе, действительно может быть прибавлен к тензору энергии-импульса. Поскольку $\frac{\partial A_l}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_l} = F_{il}$, то мы находим окончательно следующее выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}\right). \tag{32,1}$$

Легко убедиться в том, что тензор T_{ik} электромагнитного поля удовлетворяет требованию $T_{ik} = T_{ki}$; кроме того, он обладает тем свойством, что сумма его диагональных членов равна нулю:

$$T_{ii} = 0. \tag{32,2}$$

Выразим компоненты тензора T_{ik} через электрическое и магнитное поля. С помощью выражений (22,7) для компонент F_{ik} легко найти следующие выражения для T_{ik}:

$$\begin{gathered} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}(E^2 + H^2)\,\delta_{\alpha\beta}\right), \\ T_{4\alpha} = \frac{i}{c}S_\alpha, \quad T_{44} = -W, \end{gathered} \tag{32,3}$$

где $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ есть плотность энергии поля, а $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — вектор Пойнтинга. Трёхмерный тензор $T_{\alpha\beta}$ называется тензором натяжений Максвелла.

До сих пор мы рассматривали поля без зарядов. При наличии частиц общая энергия и импульс поля вместе с частицами равны сумме энергии и импульса того и другого, т. е. полный 4-импульс равен

$$P_i = -\frac{i}{c}\int T_{ik}\,dS_k + \sum p_i, \tag{32,4}$$

где $p_i = mcu_i$ — 4-импульс частицы, а сумма берётся по всем частицам, находящимся в поле. В трёхмерном виде мы можем написать для импульса поля и зарядов

$$\int \frac{\mathbf{S}}{c^2}\,dV + \sum \mathbf{p}$$

и для энергии

$$\int W\,dV + \sum \mathscr{E}.$$

Нетрудно проверить, что P_i, определённые согласно (32,4), действительно сохраняются. Вычислим изменение dP_i вектора P_i за время dt. Это можно сделать аналогично тому, как мы вычисляли изменение заряда в § 28. В некоторый момент времени t P_i определяется формулой (32,4), где интегрирование производится по всей гиперплоскости $t = \text{const}$ В момент времени $t + dt$ P_i определяется той же формулой, где теперь интегрирование производится по гиперплоскости $t + dt = \text{const.}$, а импульсы частиц берутся в момент времени $t + dt$. Разность значений интеграла $\int T_{ik}\,dS_k$ на этих гиперплоскостях можно написать в виде интеграла $\oint T_{ik}\,dS_k$ по гиперповерхности, окружающей четырёхмерный объём между этими гиперплоскостями (на бесконечности поле равно нулю и потому интеграл по «боковой гиперповерхности» исчезает). Таким образом,

$$dP_i = -\frac{i}{c}\oint T_{ik}dS_k + \sum dp_i,$$

или, по теореме Гаусса,

$$dP_i = -\frac{i}{c}\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\,d\Omega + \sum dp_i, \tag{32,5}$$

где интеграл берется по 4-объёму между двумя бесконечно близкими гиперплоскостями.

Второй член в (32,5) можно преобразовать, воспользовавшись уравнениями движения заряда в поле (22,5):

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k,$$

откуда, умножая на ds:

$$dp_i = \frac{e}{c}F_{ik}dx_k = \frac{e}{c}F_{ik}\frac{dx_k}{dt}\,dt.$$

Вводя плотность заряда ρ, имеем

$$\sum dp_i = \frac{dt}{c}\int \rho F_{ik}\frac{dx_k}{dt}\,dV = \frac{dt}{c}\int F_{ik}j_k dV,$$

где j_k — 4-вектор тока. Но полученное выражение можно написать в виде

$$\sum dp_i = \frac{1}{ic^2}\int F_{ik}j_k d\Omega,$$

где интеграл берётся по тому же 4-объёму, как и в первом члене в (32,5). Таким образом,

$$dP_i = -\frac{i}{c}\int\left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c}F_{ik}j_k\right)d\Omega.$$

С другой стороны, можно показать, с помощью уравнений Максвелла, что подинтегральное выражение здесь исчезает, так что dP_i равно нулю, т. е. P_i действительно сохраняется. Для этого пишем, воспользовавшись выражением (32,1),

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial F_{lm}^2}{\partial x_k}\delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k}F_{il}F_{kl}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i}F_{lm} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k}F_{il}\right).$$

Подставляя сюда согласно уравнениям Максвелла (25,5) и (29,2)

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c}j_l, \qquad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_m}$$

и помня, что тензор F_{ik} антисимметричен, имеем

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_l}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l}F_{lm}+\frac{1}{2}\frac{\partial F_{il}}{\partial x_m}F_{lm}+\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl}-\frac{4\pi}{c}F_{il}j_l\right).$$

Перестановкой индексов легко показать, что первые три члена справа взаимно сокращаются, и мы приходим к требуемому результату:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=-\frac{1}{c}F_{ik}j_k. \qquad (32,6)$$

Это уравнение, являющееся обобщением уравнения (31,4), представляет собой математическое выражение закона сохранения энергии и импульса электромагнитного поля вместе с находящимися в нём частицами. Четвёртая компонента этого уравнения, как легко убедиться, совпадает с уравнением (30,1).

Задачи

1. Определить главные значения тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

Решение. Тензор T_{ik} приводится к диагональному виду в системе координат, в которой векторы **E** и **H** параллельны. В этой системе

$$-T_{11}=T_{22}=T_{33}=-T_{44}=W$$

(ось X выбрана по направлению полей).

Если векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и равны по абсолютной величине, то тензор T_{ik} не может быть приведён к диагональному виду. Отличные от нуля компоненты T_{ik} в этом случае равны:

$$-T_{44}=T_{33}=-iT_{43}=W$$

(ось X выбрана по направлению **E**, а ось Y — по направлению **H**).

2. Найти формулы преобразования Лоренца для компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

Решение. По общим формулам (6,4) и (6,5) получим:

$$T_{xx}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(T'_{xx}+2\frac{V}{c^2}S'_x+\frac{V^2}{c^2}W'\right),\quad T_{yy}=T'_{yy},\quad T_{yz}=T'_{yz},$$

$$T_{xy}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(T'_{xy}+\frac{V}{c^2}S'_y\right),$$

$$S_x=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[S'_x\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)+VW'+VT'_{xx}\right],$$

$$S_y=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}(S'_y-VT'_{xy}),\qquad W=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W'+2\frac{V}{c^2}S'_x+\frac{V^2}{c^2}T'_{xx}\right)$$

и аналогичные формулы для S_z, T_{xz}, T_{zz}.

§ 33. Теорема вириала

Рассмотрим систему не взаимодействующих друг с другом частиц. Их общий 4-импульс можно написать в интегральном виде, введя соответствующим образом определённый тензор энергии-импульса. Для этого будем описывать распределение масс в пространстве при помощи «плотности массы», аналогично тому, как мы описываем распределение точечных зарядов при помощи их плотности. Аналогично формуле (27,1) для плотности зарядов плотность масс можно написать в виде:

$$\mu = \sum_A m_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{33,1}$$

где $\mathbf{r}_A$ — радиусы-векторы частиц, а суммирование производится по всем частицам системы.

«Плотность 4-импульса» частиц напишется в виде $\mu c u_i$. Как мы знаем, эта плотность представляет собой компоненты $-\frac{i}{c} T_{4\alpha}$ тензора энергии-импульса, т. е. $T_{4\alpha} = -i\mu c^2 u_i$. Но плотность массы μ является временной компонентой 4-вектора $\frac{\mu}{ic}\frac{dx_k}{dt}$ (аналогично плотности зарядов, см. § 27). Поэтому тензор энергии-импульса системы не взаимодействующих частиц есть

$$T_{ik} = \mu c \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{dt} = \mu c u_i u_k \frac{ds}{dt}. \tag{33,2}$$

Этот тензор, как это и должно быть, симметричен.

Вычислим сумму диагональных членов тензора энергии-импульса (33,2), т. е. величину T_{ii}. Имеем

$$T_{ii} = \mu c u_i u_i \frac{ds}{dt} = -\mu c \frac{ds}{dt}.$$

Подставляя сюда $ds = c\,dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ и вместо μ — сумму (33,1), находим

$$T_{ii} = -\sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A). \tag{33,3}$$

Мы видим, в частности, что $T_{ii} < 0$.

Легко убедиться в том, что выражение (33,3) для T_{ii} имеет место для любой системы взаимодействующих друг с другом заряженных частиц. Действительно, тензор энергии-импульса такой системы можно было бы написать в виде суммы тензора (33,2) и тензора энергии-импульса создаваемого частицами электромагнитного поля. Но для электромагнитного поля всегда $T_{ii} = 0$ (§ 32). Таким образом, мы можем высказать утверждение, что для любой физической системы

$$T_{ii} \leqslant 0, \tag{33,4}$$

причём знак равенства имеет место только для электромагнитного поля без зарядов.

Рассмотрим систему заряжённых частиц, совершающую движение, при котором все характеризующие систему величины (координаты, импульсы) меняются в конечных интервалах; о таком движении говорят как о квазистационарном. Определим среднее по времени значение полной энергии $\mathscr{E}$ системы. Для этого усредняем по времени второе из уравнений (31,10). При усреднении надо иметь в виду, что среднее значение производной $\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t}$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю[1]). Поэтому находим:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \overline{T_{\alpha\beta}} = 0.$$

Умножаем это уравнение на x_α и интегрируем по всему пространству. Интеграл преобразуем по теореме Гаусса, имея в виду, что на бесконечности $T_{\alpha\beta} = 0$ (движение происходит в ограниченной области пространства), и потому интеграл по поверхности исчезает:

$$\int x_\alpha \frac{\partial \overline{T_{\alpha\beta}}}{\partial x_\beta} dV = \int \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \overline{T_{\alpha\beta}} dV = \int \delta_{\alpha\beta} \overline{T_{\alpha\beta}} = 0,$$

или окончательно:

$$\int \overline{T_{\alpha\alpha}} dV = 0. \tag{33,5}$$

На основании этого равенства мы можем написать для интеграла от $\overline{T_{ii}} = \overline{T_{\alpha\alpha}} + \overline{T_{44}}$:

$$\int \overline{T_{ii}} dV = \int \overline{T_{44}} dV = -\overline{\mathscr{E}}.$$

Наконец, подставляя сюда выражение (34,3) для T_{ii}, найдём:

$$\overline{\mathscr{E}} = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}. \tag{33,6}$$

---

[1]) Пусть f есть такая величина. Тогда среднее значение производной $\frac{df}{dt}$ за некоторый интервал времени T есть

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Поскольку $f(t)$ меняется только в конечных пределах, то при неограниченном увеличении T среднее значение $\frac{df}{dt}$ действительно стремится к нулю.

Это соотношение, определяющее среднее значение энергии при квазистационарном движении, является релятивистским обобщением теоремы вириала классической механики[1]). Для малых скоростей соотношение (33,6) переходит в

$$\overline{\mathscr{E}} - \sum_A m_A c^2 = -\sum_A \frac{\overline{m_A v_A^2}}{2},$$

т. е. среднее значение полной энергии (за вычетом энергии покоя) равно взятому с обратным знаком среднему значению кинетической энергии — в согласии с результатом, даваемым классической теоремой вириала для системы заряжённых частиц (взаимодействующих по закону Кулона).

Заметим, что $\overline{\mathscr{E}} < \sum m_A c^2$, т. е. среднее значение полной энергии меньше суммы энергий покоя частиц; так и должно было быть, так как в противном случае частицы могли бы разойтись на бесконечность, и движение не было бы квазистационарным.

§ 34. Тензор энергии-импульса макроскопических тел

Рассмотрим теперь некоторое макроскопическое тело и определим его тензор энергии-импульса.

Поток импульса через элемент $d\mathfrak{f}$ поверхности тела есть не что иное, как действующая на этот элемент поверхности сила. Поэтому $T_{\alpha\beta} df_\beta$ есть α-я компонента силы, действующей на элемент поверхности. Воспользуемся теперь системой отсчёта, в которой данный элемент объёма тела покоится. В такой системе отсчёта имеет место закон Паскаля, т. е. давление, оказываемое данным участком тела, одинаково по всем направлениям и везде перпендикулярно площадке, на которую оно производится[2]). Поэтому мы можем написать $T_{\alpha\beta} df_\beta = p df_\alpha$, откуда

$$T_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta},$$

где p — давление тела. Что касается компонент $T_{\alpha 4}$, изображающих плотность импульса, то для данного элемента объёма тела в рассматриваемой системе отсчёта они равны нулю. Компонента же T_{44}, как всегда, равна плотности энергии тела, которую мы обозначим здесь посредством ε; ε/c^2 есть при этом, очевидно, плотность массы тела, т. е. масса его единицы объёма. Подчеркнём, что речь идёт здесь

---

[1]) См., например, «Механика», § 14.

[2]) Строго говоря, закон Паскаля имеет место только для жидкостей и газов. Однако для твёрдых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях ничтожны по сравнению с теми давлениями, которые могут играть роль в теории относительности, так что их учёт не представляет интереса.

о единице «собственного» объёма, т. е. объёма в той системе отсчёта, где данный участок тела покоится.

Таким образом, в рассматриваемой системе отсчёта тензор энергии-импульса (для данного участка тела) имеет вид:

$$T_{ik}=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{34,1}$$

Легко найти теперь выражение для тензора энергии-импульса макроскопического тела в любой системе отсчёта. Для этого введём 4-скорость u_i макроскопического движения элемента объёма тела. В той системе отсчёта, где данный элемент покоится, компоненты его 4-скорости равны $u_\alpha=0$, $u_4=i$. Выражение для T_{ik} должно быть выбрано так, чтобы в этой системе он приобретал вид (34,1). Легко проверить, что таковым является

$$T_{ik}=(p+\varepsilon)\,u_i u_k+p\delta_{ik}. \tag{34,2}$$

Это выражение и определяет тензор энергии-импульса макроскопического тела. Его компоненты, написанные в трёхмерном виде, равны:

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{(p+\varepsilon)\,v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+p\delta_{\alpha\beta}, \\ T_{\alpha 4} &= \frac{i(p+\varepsilon)\,v_\alpha}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}, \qquad T_{44}=-\frac{\varepsilon+p\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{34,3}$$

Если скорость v макроскопического движения мала по сравнению со скоростью света, то имеем приближённо $T_{\alpha 4}=\frac{i}{c}(p+\varepsilon)\,v_\alpha$. Поскольку $-\frac{i}{c}T_{\alpha 4}=\frac{1}{c^2}(p+\varepsilon)\,v_\alpha$ есть плотность импульса, то мы видим, что роль плотности массы тела играет в этом случае сумма $\frac{1}{c^2}(p+\varepsilon)$.

Выражение для T_{ik} упрощается в случае, если скорости всех частиц, входящих в состав макроскопического тела, малы по сравнению со скоростью света (скорость же макроскопического движения может быть произвольной). В этом случае в плотности энергии ε можно пренебречь всеми её частями, малыми по сравнению с энергией покоя, т. е. можно писать μc^2 вместо ε, где μ — сумма масс частиц, находящихся в единице (собственного) объёма тела (подчеркнём, что в общем случае μ надо отличать от точной плотности массы тела ε/c^2, включающей в себя также и массу, происходящую от энергии микроскопического движения частиц в теле и энергии их взаимодействия). Что касается давления, определяемого энергией микроскопического движения молекул, то оно в рассматриваемом случае, конечно, тоже мало по сравнению с плотностью энергии покоя μc^2. Таким образом, мы находим для T_{ik} выражение

$$T_{ik} = \mu c^2 u_i u_k. \tag{34,4}$$

Из выражения (34,2) находим $T_{ii} = -\varepsilon + 3p$. Общее свойство (33,4) тензора энергии-импульса любой системы показывает теперь, что для давления и плотности макроскопического тела всегда имеет место неравенство[1])

$$p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{34,5}$$

Сравним соотношение $T_{ii} = -\varepsilon + 3p$ с общей формулой (33,3), имеющей место, как мы видели, для любых систем. Поскольку мы рассматриваем сейчас макроскопическое тело, то выражение (33,3) надо усреднить по всем значениям $\mathbf{r}$ в единице объёма. В результате находим

$$\varepsilon - 3p = \sum m_A c^2 \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \tag{34,6}$$

(суммирование производится по частицам, находящимся в единице объёма).

Применим полученные формулы к идеальному газу, который мы предположим состоящим из одинаковых частиц. Поскольку частицы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, можно воспользоваться формулой (33,2), предварительно усреднив её. Таким образом, для идеального газа

$$T_{ik} = nmc \overline{\frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{ds}},$$

где n — число частиц в единице объёма, а черта обозначает усреднение по всем частицам. Если в газе нет никакого макроскопического движения, то мы имеем с другой стороны для T_{ik} выражение (34,1). Сравнение обеих формул приводит к уравнениям:

$$\varepsilon = nm \overline{\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}, \quad p = \frac{nm}{3} \overline{\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{34,7}$$

Эти уравнения определяют плотность и давление релятивистского идеального газа через скорости частиц; вторая из них заменяет собой известную формулу нерелятивистской кинетической теории газов.

---

[1]) Предельное значение $p = \varepsilon/3$ достигается только для электромагнитных волн.

ГЛАВА V

ПОСТОЯННОЕ ПОЛЕ

§ 35. Закон Кулона

Для постоянного электрического или, как говорят, элетростатического поля уравнения Максвелла имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{35,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{35,2}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через один только скалярный потенциал посредством соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{35,3}$$

Подставляя (35,3) в (35,1), мы находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{35,4}$$

Это уравнение носит название уравнения Пуассона. В частности, в пустоте, т. е. при $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{35,5}$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. Действительно, для того чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ имели одинаковый знак. Последнее, однако, невозможно, так как при этом не может быть выполнено (35,5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиусу-вектору, проведённому из точки, в которой находится заряд e. Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (35,1) в интегральной форме (29,5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R, проведённую вокруг заряда e, равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда мы находим

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

В векторном виде поле $\mathbf{E}$ можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \tag{35,6}$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния от этого заряда. Это — так называемый закон Кулона. Потенциал этого поля есть, очевидно,

$$\varphi = \frac{e}{R}. \tag{35,7}$$

Если мы имеем систему зарядов, то поле, создаваемое этой системой, равно согласно принципу суперпозиции сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{R_A},$$

где R_A — расстояние от заряда e_A до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда ρ, то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \tag{35,8}$$

где R — расстояние от элемента объёма dV до данной точки.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (35,4) значений ρ и φ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ и $\varphi = e/R$. Мы находим тогда

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \tag{35,9}$$

§ 36. Электростатическая энергия зарядов

Рассмотрим систему зарядов и определим её энергию. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (30,5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV,$$

где $\mathbf{E}$ есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берётся по всему пространству. Подставляя сюда $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U=-\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{grad}\varphi\, dV=-\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)\, dV+\frac{1}{8\pi}\int \varphi\operatorname{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от $\mathbf{E}\varphi$ по поверхности, ограничивающей объём интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ (35,1), находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U=\frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV. \tag{36,1}$$

Для системы точечных зарядов e_A можно вместо интеграла написать сумму по зарядам

$$U=\frac{1}{2}\sum_A e_A\varphi_A, \tag{36,2}$$

где φ_A — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд e_A.

Согласно закону Кулона, если применить полученную формулу к одной элементарной заряженной частице (скажем, электрону) и полю, производимому им самим, мы приходим к выводу, что заряд должен обладать некоторой «собственной» потенциальной энергией, равной $e\varphi/2$, где φ—потенциал производимого зарядом поля в месте, где он сам находится. Но мы знаем (см. § 8), что в теории относительности всякую элементарную частицу надо рассматривать как точечную. Потенциал же $\varphi=e/R$ его поля в точке $R=0$ обращается в бесконечность. Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной «собственной» энергией, а следовательно, и бесконечной массой (равной энергии, делённой на c^2). Физическая бессмысленность этого результата показывает, что уже основные принципы самой электродинамики приводят к тому, что её применимость должна быть ограничена определёнными пределами.

Заметим, что ввиду бесконечности получающихся из электродинамики «собственной» энергии и массы в электродинамике нельзя поставить вопроса о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией частицы).

Поскольку возникновение не имеющей физического смысла бесконечной «собственной» энергии элементарной частицы связано с тем, что такую частицу надо рассматривать как точечную, мы можем заключить, что электродинамика как логически замкнутая физическая теория становится внутренне-противоречивой при переходе к достаточно малым расстояниям. Можно поставить вопрос о том, каков порядок величины этих расстояний. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить значение порядка величины энергии покоя mc^2.

Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами R_0, то его собственная потенциальная энергия была бы порядка e^2/R_0. Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка, $e^2/R_0 \sim mc^2$, находим

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \tag{36,3}$$

Эти размеры (их называют «радиусом» электрона) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из её собственных основных принципов. Надо, впрочем, иметь в виду, что в действительности пределы применимости излагаемой здесь электродинамики (её обычно называют «классической») лежат ещё гораздо выше благодаря квантовым явлениям [1]).

Вернёмся снова к формуле (36,2). Стоящие в ней потенциалы φ_A, согласно закону Кулона, равны

$$\varphi_A = \sum \frac{e_B}{R_{AB}}, \tag{36,4}$$

где R_{AB} — расстояние между зарядами e_A, e_B. Выражение для энергии (36,2) состоит из двух частей. Во-первых, оно содержит бесконечную постоянную — «собственную» энергию зарядов, — не зависящую от их взаимного расположения. Вторая часть есть энергия взаимодействия зарядов, зависящая от их расположения. Только эта часть и имеет, очевидно, физический интерес. Она равна

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_A \varphi'_A, \tag{36,5}$$

где

$$\varphi'_A = \sum_{A \neq B} \frac{e_B}{R_{AB}} \tag{36,6}$$

есть потенциал в точке нахождения e_A, создаваемый всеми зарядами, кроме e_A. Иначе можно написать

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}. \tag{36,7}$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{36,8}$$

---

[1]) Квантовые эффекты становятся существенными при расстояниях порядка h/mc, где h — постоянная Планка.

§ 37. Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое зарядом e, движущимся равномерно со скоростью V. Неподвижную систему отсчёта будем называть системой K; систему отсчёта, движущуюся вместе с зарядом,—системой K'. Пусть заряд находится в начале координат системы K'; система K' движется относительно K параллельно оси X; оси Y и Z параллельны Y' и Z'. В момент времени $t=0$ начала обеих систем совпадают. Координаты заряда в системе K, следовательно, суть $x=Vt$, $y=z=0$. В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}'$ и скалярным, равным $\varphi'=e/R'$, где $R'^2=x'^2+y'^2+z'^2$. В системе K согласно (23,1) при $\mathbf{A}'=0$:

$$\varphi=\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{e}{R'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{37,1}$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x, y, z в системе K. Согласно формулам преобразования Лоренца,

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z,$$

и отсюда

$$R'^2=\frac{(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{37,2}$$

Подставляя это в (37,1), находим

$$\varphi=\frac{e}{R^*}, \tag{37,3}$$

где введено обозначение

$$R^{*2}=(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2). \tag{37,4}$$

Векторный потенциал в системе K [см. (23,1)] равен

$$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{37,5}$$

В системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'$ отсутствует, а электрическое

$$\mathbf{E}'=\frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

По формулам (23,5) находим

$$E_x=E'_x=\frac{ex'}{R'^3},\qquad E_y=\frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$E_z=\frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя сюда R', x', y', z', выраженные через x, y, z, находим

$$\mathbf{E}=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{37,6}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор от заряда e к точке с координатами x, y, z, в которой мы ищем поле (его компоненты равны $x-Vt$, y, z).

Это выражение для $\mathbf{E}$ можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиус-вектором $\mathbf{R}$. Очевидно, что $y^2+z^2=R^2\sin^2\theta$, и потому R^{*2} (37,4) можно написать в виде:

$$R^{*2}=R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \tag{37,7}$$

Тогда для $\mathbf{E}$ имеем

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{37,8}$$

При заданном расстоянии R от заряда величина поля E возрастает с увеличением θ от нуля до $\pi/2$ (или при уменьшении от π до $\pi/2$). Наименьшее значение имеет поле $E_{\parallel}$, направленное параллельно направлению движения ($\theta=0, \pi$); оно равно

$$E_{\parallel}=\frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Наибольшим же является поле, перпендикулярное к скорости ($\theta=\pi/2$), равное

$$E_{\perp}=\frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отметим, что при увеличении скорости поле $E_{\parallel}$ падает, а $E_{\perp}$ возрастает. Можно сказать наглядно, что электрическое поле движущегося заряда как бы «сплющивается» по направлению движения. При скоростях V, близких к скорости света, знаменатель в формуле (37,8) близок к нулю в узком интервале значений θ вокруг значения $\theta=\pi/2$. «Ширина» этого интервала порядка величины

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда велико лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причём ширина этого интервала падает с увеличением V как $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$. Вне указанного интервала углов поле быстро падает.

Магнитное поле в системе K равно $\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\mathbf{VE}]$ [см. (23,8)]. Для скоростей $V\ll c$ имеем приближённо из (37,6) $\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}$, и потому

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c}\frac{[\mathbf{VR}]}{R^3}. \tag{37,9}$$

§ 38. Движение в кулоновом поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле, создаваемом другим зарядом e'; мы предполагаем, что масса этого другого заряда настолько больше массы m, что его можно считать неподвижным. Тогда задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметрическом электрическом поле с потенциалом $\varphi=e'/r$.

Энергия (полная) $\mathscr{E}$ частицы равна

$$\mathscr{E}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha=ee'$. Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения частицы, то для импульса можно, как известно из механики, написать $p^2=\frac{M^2}{r^2}+p_r^2$, где p_r — радиальная компонента импульса, а M — постоянный момент импульса частицы. Тогда

$$\mathscr{E}=c\sqrt{p_r^2+\frac{M^2}{r^2}+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r}. \tag{38,1}$$

Выясним вопрос о том, может ли частица при своём движении приближаться сколь угодно близко к центру. Прежде всего очевидно, что это во всяком случае невозможно, если заряды e и e' отталкиваются, т. е. e и e' — одного знака. Далее, в случае притяжения (e и e' имеют различные знаки) неограниченное приближение к центру невозможно, если $Mc>|\alpha|$; действительно, в этом случае первый член в (38,1) всегда больше второго, и при $r\to 0$ правая сторона этого уравнения стремилась бы к бесконечности. Напротив, если $Mc<|\alpha|$, то при $r\to 0$ это выражение может оставаться конечным (при этом, разумеется, стремится к бесконечности p_r). Таким образом, если

$$cM<|\alpha|, \tag{38,2}$$

то частица при своём движении «падает» на притягивающий её заряд, — в противоположность тому, что в нерелятивистской механике такое падение вообще невозможно (за исключением только случая $M=0$, когда частица e летит прямо на частицу e').

Полное определение движения заряда в кулоновом поле удобнее всего производить, исходя из уравнения Гамильтона-Якоби. Выберем полярные координаты r, φ в плоскости движения. Уравнение

Гамильтона-Якоби (14,11) имеет вид

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\alpha}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+m^2c^2=0.$$

Ищем S в виде

$$S=-\mathscr{E}t+M\varphi+f(r),$$

где $\mathscr{E}$ и M — постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы. В результате находим

$$S=-\mathscr{E}t+M\varphi+\int\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}-\frac{\alpha}{r}}{c}\right)^2-\frac{M^2}{r^2}-m^2c^2}\cdot dr. \qquad (38,3)$$

Траектория определяется уравнением $\frac{\partial S}{\partial M}=\text{const}$. Интегрирование приводит к следующим результатам:

a) если $Mc>|\alpha|$:

$$(c^2M^2-\alpha^2)\frac{1}{r}=c\sqrt{(M\mathscr{E})^2-m^2c^2(M^2c^2-\alpha^2)}\cos\varphi\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2M^2}}-\mathscr{E}\alpha; \qquad (38,4)$$

b) если $Mc<|\alpha|$:

$$(\alpha^2-c^2M^2)\frac{1}{r}=\pm c\sqrt{(M\mathscr{E})^2+m^2c^2(\alpha^2-M^2c^2)}\,\mathrm{ch}\,\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2}-1}+\mathscr{E}\alpha; \qquad (38,5)$$

c) если $Mc=|\alpha|$:

$$\frac{2\mathscr{E}\alpha}{r}=\mathscr{E}^2-m^2c^4-\varphi^2\left(\frac{\mathscr{E}\alpha}{cM}\right)^2. \qquad (38,6)$$

Постоянная интегрирования заключена в произвольном выборе начала отсчёта угла φ.

В (38,4) выбор знака перед корнем несуществен, так как тоже связан с выбором начала отсчёта угла φ под знаком cos. Изображаемая этим уравнением траектория в случае притяжения ($\alpha<0$) лежит целиком при конечных значениях r (финитное движение), если $\mathscr{E}<mc^2$. Если же $\mathscr{E}>mc^2$, то r может обращаться в бесконечность (движение инфинитно). Финитному движению соответствует в нерелятивистской механике движение по замкнутым орбитам (эллипсам). Из (38,4) видно, что в релятивистской механике траектория никогда не может быть замкнутой — при изменении угла φ на 2π расстояние r от центра не возвращается к исходному значению. Вместо эллипсов мы имеем здесь орбиты в виде незамкнутых «розеток». Таким образом, в то время как в нерелятивистской механике финитное движение в кулоновом поле происходит по замкнутым орбитам, в релятивистской механике кулоново поле теряет это своё свойство.

В (38,5) перед корнем должен быть выбран знак $+$ при $\alpha<0$ и знак $-$ при $\alpha>0$ [другой выбор знаков соответствовал бы изменённому знаку перед корнем в (38,1)].

При $\alpha<0$ траектории (38,5) и (38,6) представляют собой спирали с расстоянием r, стремящимся к нулю при $\varphi\to\infty$. Время же, в течение которого происходит «падение» заряда в начало координат, — конечно. Убедиться в этом можно, замечая, что зависимость координаты r от времени определяется равенством $\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}=\text{const.}$; подставляя сюда (38,3), увидим, что время определяется интегралом, сходящимся при $r\to 0$.

Задачи

1. Определить угол отклонения заряда, пролетающего в кулоновом поле отталкивания ($\alpha>0$).

Решение. Угол отклонения χ равен $\chi=\pi-2\varphi_0$, где φ_0 — угол между двумя асимптотами траектории (38,4). Находим:

$$\chi=\pi-\frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{v\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}{c\alpha},$$

где v — скорость заряда на бесконечности.

2. Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы при рассеянии частиц кулоновым полем.

Решение. Эффективное сечение $d\sigma$ есть отношение числа частиц, рассеянных (в 1 сек.) в данный элемент do телесного угла к плотности рассеиваемого потока частиц (т. е. к числу частиц, проходящих в 1 сек. через 1 $см^2$ площади поперечного сечения пучка частиц) [1]).

Поскольку угол χ отклонения частицы при её пролетании через поле определяется «прицельным расстоянием» ρ (т. е. расстоянием от центра до прямой, по которой двигался бы заряд в отсутствии поля), то

$$d\sigma=2\pi\rho\,d\rho=2\pi\rho\frac{d\rho}{d\chi}d\chi=\rho\frac{d\rho}{d\chi}\frac{do}{\sin\chi},$$

где $do=2\pi\sin\chi d\chi$. Угол отклонения (если он мал) можно считать равным отношению приращения импульса к его первоначальному значению. Приращение импульса равно интегралу по времени от силы, действующей на заряд. Компонента этой силы, перпендикулярная к направлению движения, приближённо равна $\frac{\alpha}{r^2}\frac{\rho}{r}$. Таким образом, имеем

$$\chi=\frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha\rho\,dt}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}}=\frac{\alpha}{p\rho v}$$

(v — скорость частиц). Отсюда находим эффективное сечение для малых χ:

$$d\sigma=4\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2\frac{do}{\chi^4}.$$

---

[1]) См., например, «Механика», § 21.

§ 39. Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях от этой системы, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с расстояниями между отдельными зарядами системы.

Введём систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов пусть будут $\mathbf{r}_A$. Определим потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиусом-вектором $\mathbf{R}_0$. Согласно результатам § 35 потенциал этого поля равен

$$\varphi = \sum_A \frac{e_A}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A|} \tag{39,1}$$

(суммирование производится по всем зарядам); здесь $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ суть радиус-векторы от зарядов e_A к точке, где мы ищем потенциал.

Мы должны исследовать это выражение для больших $\mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_A$). Для этого разложим (39,1) в ряд по степеням $\mathbf{r}_A/\mathbf{R}_0$, воспользовавшись формулой

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}\,\mathrm{grad}\, f(\mathbf{R}_0)$$

(в grad дифференцирование производится по координатам конца вектора $\mathbf{R}_0$). С точностью до членов первого порядка

$$\varphi = \frac{\Sigma e_A}{R_0} - \sum e_A \mathbf{r}_A \cdot \mathrm{grad}\, \frac{1}{R_0}. \tag{39,2}$$

Сумма

$$\mathbf{d} = \sum e_A \mathbf{r}_A \tag{39,3}$$

носит название дипольного момента системы зарядов. Существенно отметить, что если сумма Σe_A всех зарядов равна нулю, то дипольный момент $\mathbf{d}$ не зависит от выбора начала координат. Действительно, радиус-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_A{}'$ одного и того же заряда в двух разных системах координат связаны друг с другом посредством соотношения

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор. Поэтому, если $\sum e_A = 0$, то дипольный момент в обеих системах одинаков:

$$\mathbf{d}' = \sum e_A \mathbf{r}'_A = \sum e_A \mathbf{r}_A + \mathbf{a} \sum e_A = \mathbf{d}.$$

Если обозначить посредством e_A^+, $\mathbf{r}_A^+$ и $-e_A^-$, $\mathbf{r}_A^-$ положительные и отрицательные заряды системы и их радиус-векторы, то можно написать дипольный момент в виде

$$\mathbf{d} = \sum e_A^+ \mathbf{r}_A^+ - \sum e_A^- \mathbf{r}_A^- = \mathbf{R}^+ \sum e_A^+ - \mathbf{R}^- \sum e_A^-, \tag{39,4}$$

где

$$\mathbf{R}^{+}=\frac{\sum e_A^{+}\mathbf{r}_A^{+}}{\sum e_A^{+}},\quad \mathbf{R}^{-}=\frac{\sum e_A^{-}\mathbf{r}^{-}}{\sum e_A^{-}} \tag{39,5}$$

суть радиус-векторы «центров зарядов» — положительных и отрицательных. Если $\sum e_A^{+}=\sum e_A^{-}=e$, то

$$\mathbf{d}=e\mathbf{R}_{+-}, \tag{39,6}$$

где $\mathbf{R}_{+-}=\mathbf{R}^{+}-\mathbf{R}^{-}$ есть радиус-вектор от центра отрицательных к центру положительных зарядов. В частности, если имеются всего два заряда, то $\mathbf{R}_{+-}$ есть радиус-вектор между ними.

Если сумма $\sum e_A=0$, то потенциал поля такой системы на больших расстояниях выглядит как

$$\varphi=\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3} \tag{39,7}$$

(мы подставляем $\operatorname{grad}\frac{1}{R_0}=-\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}$). Зная потенциал, можно найти поле $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi=-\operatorname{grad}\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}_0}{R_0^3}=-\frac{1}{R_0^3}\operatorname{grad}(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)-(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}.$$

Согласно формуле $\operatorname{grad}(\mathbf{d}\mathbf{R}_0)=\mathbf{d}$ и замечая, что $\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}=-\frac{3\mathbf{R}_0}{R_0^5}$, находим для поля $\mathbf{E}$ выражение

$$\mathbf{E}=\frac{3(\mathbf{R}_0\mathbf{d})\mathbf{R}_0-R_0^2\mathbf{d}}{R_0^5}. \tag{39,8}$$

Таким образом, потенциал поля, создаваемого системой зарядов с $\sum e_A=0$, обратно пропорционален квадрату расстояния от системы, а напряжённость поля — кубу расстояния.

§ 40. Мультипольные моменты

В разложении потенциала по степеням $1/R_0$

$$\varphi=\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\dots$$

член $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/R_0^n$. Мы видели, что первый член $\varphi^{(1)}$ определяется суммой всех зарядов; второй, $\varphi^{(2)}$, называемый иногда дипольным потенциалом системы, определяется дипольным моментом системы.

Третий член разложения $\varphi^{(3)}$ равен, очевидно,

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{2}\sum ex_\alpha x_\beta\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}, \tag{40,1}$$

где сумма берётся по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α—компоненты вектора $\mathbf{r}$, а X_α—вектора $\mathbf{R}_0$.

Эта часть потенциала обычно называется квадрупольным потенциалом. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(3)}$.

В выражение (40,1) входит шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко, однако, видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.

$$\Delta\frac{1}{R_0}=\frac{\partial^2}{\partial X_\beta^2}\frac{1}{R_0}=0.$$

Это равенство можно написать в виде

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}=0.$$

Мы можем, поэтому, написать $\varphi^{(3)}$ в виде

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{\alpha\beta}=\sum e\left(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{40,2}$$

называется квадрупольным моментом системы.

Из определения $D_{\alpha\beta}$ вытекает, что сумма его диагональных компонент равна нулю:

$$D_{\alpha\alpha}=0. \tag{40,3}$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет поэтому всего пять независимых компонент. С помощью $D_{\alpha\beta}$ можно написать

$$\varphi^{(3)}=\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}. \tag{40,4}$$

Совершенно аналогично можно было бы написать следующие члены разложения φ. n-й член определяется тензором n-го ранга, составленным из зарядов и компонент их радиус-векторов; эти тензоры называют мультипольными моментами системы. Все они являются симметричными по всем индексам и при упрощении (свёртывании) по любой паре индексов [1]) дают нуль. Можно показать, что тензор мультипольного момента n-го порядка обладает всего $2n-1$ независимыми компонентами.

---

[1]) Упрощение тензора по паре индексов означает приравнивание друг другу двух индексов с последующим суммированием по ним; при этом ранг тензора понижается на два.

§ 41. Система зарядов во внешнем поле

Мы рассмотрим теперь систему зарядов e_1, $e_2, \ldots$, находящуюся во внешнем электрическом поле. Посредством φ_A мы будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля в точке, где находится заряд e_A. Потенциальная энергия каждого из зарядов есть $e_A\varphi_A$, а полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \sum e_A \varphi_A.$$

Выберем опять систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; $\mathbf{r}_A$ — радиус-вектор заряда e_A в этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням $\mathbf{r}_A$. В этом разложении

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots$$

первый член есть

$$U^{(1)} = \varphi_0 \sum e_A, \tag{41,1}$$

где φ_0 — значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке (в начале координат).

Второй член разложения

$$U^{(2)} = \operatorname{grad} \varphi_0 \cdot \sum e_A \mathbf{r}_A.$$

$\operatorname{grad}\varphi_0$ есть значение градиента потенциала в начале координат; поскольку $\operatorname{grad}\varphi = -\mathbf{E}$, то это есть не что иное, как напряжённость $\mathbf{E}_0$ поля в начале координат. Вводя дипольный момент $\mathbf{d}$ системы, имеем

$$U^{(2)} = -\mathbf{d}\mathbf{E}_0. \tag{41,2}$$

Для однородного поля выражение $U^{(2)}$ вытекает также и непосредственно из выражения (18,3) для потенциала.

Следующий член разложения $U^{(3)}$ равен

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Здесь мы, как и в § 40, опустили индексы, указывающие номер заряда; $\dfrac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ — значения вторых производных от потенциала в начале координат; но потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Поэтому мы можем написать $U^{(3)}$ в виде

$$U^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right),$$

или

$$U^{(3)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \tag{41,3}$$

где $D_{\alpha\beta}$ — компоненты квадрупольного момента (см. § 40).

Предположим, что мы имеем две системы зарядов с равными нулю суммами зарядов в каждой из них и дипольными моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$. Их взаимное расстояние при этом велико по сравнению с их собственными размерами. Определим потенциальную энергию U их взаимодействия. Для этого можно рассматривать одну из этих систем как находящуюся в поле второй. Тогда

$$U = -\mathbf{d}_2\mathbf{E}_1,$$

где $\mathbf{E}_1$ — поле первой системы. Подставляя для $\mathbf{E}_1$ выражение (39,8), находим

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1\mathbf{R})(\mathbf{d}_2\mathbf{R})}{R^5}, \tag{41,4}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна e), получаем аналогичным образом

$$U = e\frac{\mathbf{dR}}{R^3}, \tag{41,5}$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, направленный от диполя (системы с равной нулю суммой зарядов) к заряду (системе с суммой зарядов, равной e).

Мы не будем выводить аналогичных выражений для взаимодействия квадруполя (системы с равными нулю полным зарядом и дипольным моментом) с зарядом, диполем и квадруполем; укажем только, что соответствующие потенциальные энергии обратно пропорциональны 3-й, 4-й и 5-й степеням расстояния R.

§ 42. Постоянное магнитное поле

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими стационарное движение. Под этим подразумевается, что заряды при своём движении не приходят из бесконечности и не уходят на бесконечность, а движутся всё время в некоторой конечной области пространства. Кроме того, предположим, что импульсы всех зарядов тоже остаются всё время конечными. Тогда все величины меняются только в конечных интервалах своих значений, и представляет интерес рассматривать средние (по времени) их значения. В частности, мы можем рассмотреть среднее магнитное поле $\overline{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами, которое будет теперь уже функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

Для того чтобы найти уравнения, определяющие среднее поле $\mathbf{H}$, усредним по времени уравнения Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Первое из них даёт просто

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}}=0. \tag{42,1}$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю (см. сноску на стр. 99). Поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{42,2}$$

Эти два уравнения и определяют постоянное поле $\overline{\mathbf{H}}$.

Введём средний векторный потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ согласно

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}=\overline{\mathbf{H}}.$$

Подставим это в уравнение (42,2). Поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}$, мы находим

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}}-\Delta\overline{\mathbf{A}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

Но мы знаем, что векторный потенциал поля определён неоднозначно, и поэтому на него можно наложить любое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциал $\overline{\mathbf{A}}$ так, чтобы

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}}=0. \tag{42,3}$$

Тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta\overline{\mathbf{A}}=-\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{42,4}$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что (42,4) вполне аналогично уравнению Пуассона (35,4) для скалярного потенциала постоянного электрического поля, причём вместо плотности заряда ρ стоит плотность тока $\overline{\mathbf{j}}/c$. По аналогии с решением (35,6) уравнения Пуассона мы можем непосредственно написать

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\,dV, \tag{42,5}$$

где R — расстояние от точки, в которой мы ищем $\overline{\mathbf{A}}$ до элемента объёма dV.

В формуле (42,5) можно перейти от интеграла к сумме по зарядам, подставляя вместо $\mathbf{j}$ произведение $\rho\mathbf{v}$ и помня, что все заряды точечные. При этом необходимо иметь в виду, что в интеграле (42,5) R является просто переменной интегрирования и потому, конечно, не подвергается усреднению. Если же написать вместо интеграла $\int \frac{\mathbf{j}}{R}\, dV$ сумму $\sum \frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}$, то R_A здесь являются радиус-векторами отдельных частиц, меняющимися при движении зарядов. Поэтому надо писать

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}}, \tag{42,6}$$

где усредняется всё выражение, стоящее под чертой.

Зная $\overline{\mathbf{A}}$, можно найти и магнитное поле

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}\, dV.$$

Операция rot производится по координатам точки, в которой мы ищем поле. Поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать $\mathbf{j}$ постоянным. Применяя известную формулу

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f \operatorname{rot} \mathbf{a} - [\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{a}],$$

где f и $\mathbf{a}$ — любые скаляр и вектор, к произведению $\overline{\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{R}$, находим

$$\operatorname{rot} \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R} \cdot \overline{\mathbf{j}}\right] = \frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3},$$

и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3}\, dV \tag{42,7}$$

(радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку, где определяется поле). Это — так называемый закон Био и Савара.

§ 43. Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы, т. е. на расстояниях, больших по сравнению с размерами самой системы.

Введём систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали в § 39. Обозначим опять радиус-векторы отдельных зарядов посредством $\mathbf{r}_A$, а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, посредством $\mathbf{R}_0$. Тогда $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_A$ есть радиус-вектор от заряда e_A к точке, где определяется поле. Согласно (42,6) мы имеем для векторного потенциала:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_A \mathbf{v}_A}{|R_0 - \mathbf{r}_A|}}. \tag{43,1}$$

Как и в § 39, разложим это выражение по степеням $\mathbf{r}_A$. С точностью до членов первого порядка (опуская для краткости индекс A):

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0}\sum e\overline{\mathbf{v}}-\frac{1}{c}\sum \overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}.$$

В первом члене можно написать

$$\sum e\overline{\mathbf{v}}=\overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}.$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины $\sum e\mathbf{r}$ равно нулю. Таким образом, для $\overline{\mathbf{A}}$ остаётся выражение

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0^3}\sum \overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}$$

$\left(\text{мы подставили сюда } \nabla\frac{1}{R_0}=-\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right)$.

Это выражение преобразуем следующим образом. Замечая, что $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$, мы можем написать (помня, что $\mathbf{R}_0$ есть постоянный вектор)

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\,\mathbf{v}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)+\frac{1}{2}\sum e\left[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)\right].$$

При подстановке этого выражения в $\overline{\mathbf{A}}$ среднее значение от первого члена (с производной по времени) опять обратится в нуль, и мы получим

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{2cR_0^3}\sum e\left[\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}-\overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)}\right].$$

Введём вектор

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{r}\mathbf{v}], \tag{43,2}$$

называемый магнитным моментом системы. Тогда для $\overline{\mathbf{A}}$ мы получим выражение

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} \tag{43,3}$$

Зная векторный потенциал, легко найти магнитное поле. С помощью формулы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}]=(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}-(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b}+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

находим

$$\overline{\mathbf{H}}=\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}=\operatorname{rot}\left[\overline{\mathfrak{m}}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right]=\overline{\mathfrak{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}-(\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Далее,

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}=\mathbf{R}_0\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}+\frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0=0$$

и

$$(\mathfrak{m}\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}=\frac{1}{R_0^3}(\mathfrak{m}\nabla)\mathbf{R}_0+\mathbf{R}_0\left(\mathfrak{m}\nabla\frac{1}{R_0^3}\right)=\frac{\mathfrak{m}}{R_0^3}-\frac{3\mathbf{R}_0(\mathfrak{m}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Таким образом,

$$\overline{\mathbf{H}}=\frac{3\mathbf{R}_0(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0)-\overline{\mathfrak{m}}R_0^2}{R_0^5}. \tag{43,4}$$

Мы видим, что магнитное поле выражается через магнитный момент такой же формулой, какой электрическое поле выражается через дипольный момент [см. (39,8)].

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e\,[\mathbf{r}\mathbf{v}]=\frac{e}{2mc}\sum m\,[\mathbf{r}\mathbf{v}].$$

Если скорости всех зарядов $v\ll c$, то $m\mathbf{v}$ есть импульс $\mathbf{p}$ заряда, и мы получаем

$$\mathfrak{m}=\frac{e}{2mc}\sum[\mathbf{r}\mathbf{p}]=\frac{e}{2mc}\mathbf{M}, \tag{43,5}$$

где $\mathbf{M}=\sum[\mathbf{r}\mathbf{p}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/2mc$.

Обозначим посредством L_H дополнительный член в функции Лагранжа, обусловленный магнитным полем. В постоянном однородном магнитном поле имеем, воспользовавшись выражением (18,4) для векторного потенциала:

$$L_H=\sum\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}=\sum\frac{e}{2c}[\mathbf{H}\mathbf{r}]\,\mathbf{v}=\sum\frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathbf{v}]\,\mathbf{H},$$

т. е.

$$L_H=\mathfrak{m}\mathbf{H}, \tag{43,6}$$

где $\mathfrak{m}$ — магнитный момент системы зарядов. Обращаем внимание на аналогию с электрическим полем — в однородном электрическом поле функция Лагранжа системы зарядов с общим зарядом, равным нулю, содержит член

$$L_E=\mathbf{d}\mathbf{E}$$

($\mathbf{d}$ — дипольный момент системы), являющийся в этом случае потенциальной энергией системы зарядов, взятой с обратным знаком (см. § 41).

Рассмотрим систему зарядов, совершающих финитное движение (со скоростями $v \ll c$) в центрально-симметрическом электрическом поле, создаваемом некоторой неподвижной частицей; финитность движения означает, что заряды остаются всё время в некоторой конечной области пространства. Перейдём от неподвижной системы координат к системе, равномерно вращающейся вокруг оси, проходящей через неподвижную частицу. Согласно известной формуле, скорость $\mathbf{v}$ частицы в новой системе координат связана с её же скоростью $\mathbf{v}'$ в старой системе посредством соотношения

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}],$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы, а $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращающейся системы координат. В неподвижной системе функция Лагранжа системы зарядов есть

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U,$$

где U — потенциальная энергия зарядов во внешнем электрическом поле вместе с энергией их взаимодействия друг с другом. U является функцией от расстояний зарядов до неподвижной частицы и от их взаимных расстояний; при переходе к вращающейся системе координат она остаётся, очевидно, неизменной. Поэтому в новой системе функция Лагранжа будет

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}])^2 - U.$$

Предположим, что у всех частиц отношение e/m зарядов к массам одинаково, и положим

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \qquad (43,7)$$

Тогда при достаточно малых H (когда можно пренебречь членами с H^2) функция Лагранжа приобретает вид:

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e\,[\mathbf{H}\mathbf{r}]\,\mathbf{v}.$$

Мы видим, что она совпадает с функцией Лагранжа, которой описывалось бы движение рассматриваемых зарядов в неподвижной системе координат при наличии постоянного магнитного поля [ср. (43,6)].

Таким образом, мы приходим к результату, что поведение системы зарядов с одинаковыми отношениями e/m, совершающих финитное движение (со скоростями $v \ll c$) в центрально-симметрическом электрическом поле и в слабом однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, эквивалентно поведению этой же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью (43,7) (так называемая теорема Лармора). Угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ называется частотой Лармора.

Отметим, что если мы имеем всего одну частицу, движущуюся в магнитном поле $\mathbf{H}$, то угловая скорость её вращения по круговой орбите равна (20,8), т. е. удвоенной ларморовой частоте.

Задача

Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов (скорости $v \ll c$).

Решение. Выбирая начало координат в центре инерции обеих частиц, будем иметь $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения. С помощью этих соотношений найдём

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{M}.$$

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 44. Уравнение д'Аламбера

Электромагнитное поле в пустоте определяется уравнениями Максвелла, в которых надо положить $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Выпишем эти уравнения ещё раз:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{44,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{44,2}$$

Эти уравнения могут иметь отличное от нуля решение. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов.

Электромагнитные поля, существующие в пустоте в отсутствии зарядов, называют электромагнитными волнами. Мы займёмся теперь исследованием свойств таких полей.

Раньше всего отметим, что такие электромагнитные поля в отсутствии зарядов необходимо должны быть переменными. Действительно, в противном случае $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, и уравнения (44,1) и (44,2) переходят в уравнения (35,1—2) и (42,1—2) постоянного поля, в которых, однако, теперь $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Но решения этих уравнений, определённые формулами (35,8) и (42,5), при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ обращаются в нуль.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы электромагнитных волн.

Как мы уже знаем, в силу неоднозначности потенциалов всегда можно наложить на них некоторое дополнительное условие. На этом основании выберем потенциалы электромагнитных волн так, чтобы для скалярного потенциала осуществлялось равенство

$$\varphi = 0. \tag{44,3}$$

Тогда $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Подставляя оба эти выражения в первое из уравнений (44,2), находим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{44,4}$$

Несмотря на то, что мы уже наложили одно дополнительное условие на потенциалы, потенциал $\mathbf{A}$ всё же ещё не вполне однозначен. Именно, к нему можно прибавить градиент любой не зависящей от времени функции (не меняя при этом φ). В частности, можно выбрать потенциал электромагнитной волны таким образом, чтобы

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{44,5}$$

Действительно, подставляя $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ в $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, имеем $\operatorname{div}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, т. е. $\operatorname{div}\mathbf{A}$ есть функция только от координат. Эту функцию всегда можно обратить в нуль прибавлением к $\mathbf{A}$ градиента от соответствующей не зависящей от времени функции.

Уравнение (44,4) приобретает теперь вид

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = 0. \tag{44,6}$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы электромагнитных волн. Оно называется уравнением д'Аламбера или волновым уравнением.

Применяя к этому уравнению операции rot и $\frac{\partial}{\partial t}$, можно убедиться в том, что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

Оператор $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют оператором д'Аламбера и обозначают посредством знака $\square$:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{44,7}$$

так что волновое уравнение можно написать в виде

$$\square f = 0, \tag{44,8}$$

где f есть любая из компонент $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. Оператор д'Аламбера можно написать в четырёхмерном виде; очевидно, что

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{44,9}$$

§ 45. Плоские волны

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, при котором поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются плоскими. В этом случае уравнения поля приобретают вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0, \tag{45,1}$$

где под f подразумевается любая компонента векторов $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$.

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)f=0$$

и введём новые переменные

$$\xi=x-ct, \quad \eta=x+ct.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

так что уравнение для f приобретает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}=0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ, находим

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя ещё раз, находим $f=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$f=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{45,2}$$

Пусть, например, $f_2=0$, так что $f=f_1(x-ct)$. Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости $x=\text{const.}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x. Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $x-ct=\text{const.}$, т. е.

$$x=\text{const.}+ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t=0$ в некоторой точке x пространства поле имело определённое значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси X от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси X со скоростью, равной скорости света c.

Таким образом, $f_1(x-ct)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси X. Легко сообразить, что $f_2(x+ct)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном направлении оси X.

В § 44 было показано, что потенциалы электромагнитной волны можно выбрать так, чтобы $\varphi=0$, причём $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом. Условие $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ даёт в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0,$$

поскольку все величины не зависят от y и z. Согласно (45,1) будем иметь тогда и $\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}=0$, т. е. $\frac{\partial A_x}{\partial t}=\text{const}$. Но производная $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ определяет электрическое поле, и мы видим, что отличная от нуля компонента A_x означала бы в рассматриваемом случае наличие постоянного продольного электрического поля. Поскольку такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, то можно положить $A_x=0$.

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси X, т. е. к направлению распространения этой волны.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси X; в такой волне все величины, в частности и $\mathbf{A}$, являются функциями только от $x-ct$. Из формул

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\qquad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

мы находим поэтому

$$\mathbf{E}=\mathbf{A}',\quad \mathbf{H}=[\nabla\mathbf{A}]=[\nabla(x-ct)\cdot\mathbf{A}']=[\mathbf{n}\mathbf{A}'],\tag{45,3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по $x-ct$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны. Подставляя первое равенство во второе, находим

$$\mathbf{H}=[\mathbf{n}\mathbf{E}].\tag{45,4}$$

Мы видим [из $\mathbf{E}=\mathbf{A}'$ и (45,4)], что электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют поперечными. Из (45,4) видно, далее, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу. Кроме того, из того же уравнения (45,4) следует, что электрическое и магнитное поля плоской волны равны друг другу по абсолютной величине.

Найдём ещё поток энергии в плоской волне, т. е. её вектор Пойнтинга. Имеем:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{nE}]],$$

и поскольку $\mathbf{En} = 0$, то

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ есть плотность энергии волны, то можно написать

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}, \qquad (45,5)$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

Импульс единицы объёма электромагнитного поля есть $\mathbf{S}/c^2$. Для плоской волны это даёт $(W/c)\,\mathbf{n}$. Обратим внимание на то, что соотношение между энергией W и импульсом W/c электромагнитной волны оказывается таким же, как для частиц, движущихся со скоростью света [см. (10,6)].

Поток импульса поля определяется компонентами $T_{\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса. Выбирая попрежнему направление распространения волны в качестве оси X, найдём, что единственная отличная от нуля компонента $T_{\alpha\beta}$ есть:

$$T_{xx} = W. \qquad (45,6)$$

Как и должно было быть, поток импульса направлен по направлению распространения волны и равен по величине плотности энергии.

Если электромагнитная волна падает на тело, которым и поглощается, то на это тело будет действовать некоторое давление (так называемое световое давление). Оно равно нормальной (к поверхности тела) компоненте импульса, передаваемого волной (в единицу времени) телу через единицу площади его поверхности. Если θ есть угол между нормалью и направлением падающей волны, то давление будет равно $W\cos\theta$. В общем случае, когда волна не поглощается целиком, а частично отражается от поверхности тела, световое давление равно сумме абсолютных значений импульсов, приносимого падающей и уносимого отраженной волной.

§ 46. Монохроматическая плоская волна

Весьма важным частным случаем электромагнитных волн является волна, в которой поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической. Все величины (потенциалы, компоненты полей) в монохроматической волне зависят от времени посредством множителя вида $\cos(\omega t + \alpha)$. Величина ω

называется циклической частотой волны (мы будем говорить о ней просто как о частоте). Период волны равен $2\pi/\omega$.

В волновом уравнении вторая производная от поля по времени равна теперь $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$, так что распределение поля по пространству определяется в монохроматической волне уравнением

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \tag{46,1}$$

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси X) поле является функцией только от $x - ct$. Поэтому если плоская волна монохроматична, то её поле является простой периодической функцией от $x - ct$.

Векторный потенциал такой волны удобнее всего написать в виде действительной части комплексного выражения

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\} \tag{46,2}$$

(Re обозначает действительную часть). Здесь $\mathbf{A}_0$ есть некоторый постоянный комплексный вектор. Очевидно, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ такой волны будут иметь аналогичный вид:

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\}, \quad \mathbf{H} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_0 e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\right\}$$

с той же частотой ω.

Величина

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{46,3}$$

называется длиной волны; это есть период изменения поля с координатой x в заданный момент времени t. $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ называются комплексными амплитудами соответствующих величин.

Пользование комплексными выражениями оказывается очень удобным ввиду линейности уравнений Максвелла. Именно, благодаря этому можно все операции производить не над тригонометрическими, а над более простыми экспоненциальными выражениями и только потом переходить к действительной их части. В дальнейшем мы будем часто пользоваться комплексной формой. При этом всегда будет подразумеваться действительная часть соответствующего комплексного выражения.

Если ввести единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении распространения волны, то (46,2) можно написать в виде:

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\mathbf{nr}\right)}\right\}.$$

Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{46,4}$$

называется волновым вектором. Мы имеем, следовательно,

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\} \tag{46,5}$$

и аналогичные выражения для **E** и **H**.

Поля **E** и **H** можно согласно (45,3) выразить через **A**; для монохроматической волны получаем из этих формул

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i\,[\mathbf{kA}]. \tag{46,6}$$

Четырёхмерным волновым вектором называется вектор k_i с компонентами

$$k_{1,\,2,\,3,} = k_{x,\,y,\,z,} \quad k_4 = \frac{i\omega}{c}. \tag{46,7}$$

Вводя этот вектор, мы можем написать (46,5) в виде:

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}_0 e^{ik_i x_i}\}. \tag{46,8}$$

Квадрат волнового 4-вектора

$$k_i^2 = 0. \tag{46,9}$$

Это соотношение вытекает непосредственно из определений (46,4) и (46,7), а также если подставить (46,8) в уравнение д'Аламбера:

$$\Box\mathbf{A} = 0.$$

Задача

Определить движение заряда в поле плоской монохроматической волны $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos k\,(x - ct)$.

Решение. Выбираем ось Y по направлению **A**; уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c} A_0 \cos k\,(x - ct)\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Будем искать S в виде

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma\,(x + ct) + f(x - ct),$$

где α, β, γ — постоянные, а $f(x - ct)$ — неизвестная функция. В результате находим

$$S = \alpha y + \beta z + \gamma\,(x + ct) - \frac{1}{4\gamma}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)(x - ct) +$$
$$+ \frac{\alpha e A_0}{2\gamma k} \sin k\,(x - ct) - \frac{e^2A_0^2}{16\gamma kc} \sin 2k\,(x - ct).$$

Для определения движения надо приравнять производные $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial S}{\partial \beta}$, $\frac{\partial S}{\partial \gamma}$ некоторым постоянным, которые могут быть выбраны равными нулю путём соответствующего выбора начала координат и начала отсчёта времени.

Вводя величину $\eta = k(x - ct)$, находим тогда уравнения, определяющие движение в параметрическом виде:

$$x = -\frac{1}{8\gamma^2 k}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)\eta + \frac{\eta}{2k} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2 kc}\sin\eta - \frac{e^2A_0^2}{32\gamma^2 kc^2}\sin 2\eta,$$

$$y = \frac{\alpha}{2\gamma k}\eta - \frac{eA_0}{2\gamma kc}\sin\eta, \qquad z = \frac{\beta}{2\gamma k}\eta,$$

$$ct = -\frac{1}{8\gamma^2 k}\left(\alpha^2 + \beta^2 + m^2c^2 + \frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)\eta - \frac{\eta}{2k} + \frac{\alpha e A_0}{4\gamma^2 kc}\sin\eta - \frac{e^2A_0^2}{32\gamma^2 kc^2}\sin 2\eta.$$

Системе отсчёта, в которой заряд в среднем покоится, соответствуют такие значения α, β, γ, для которых коэффициенты при η в выражениях для x, y, z обращаются в нуль. В этой системе имеем:

$$x = -\frac{a^2}{2k}\sin 2\eta, \quad y = -\frac{2a}{k}\sin\eta, \quad z = 0, \quad ct = -\frac{\eta}{k} - \frac{a^2}{2k}\sin 2\eta,$$

где

$$a = \frac{eA_0}{2c}\left(m^2c^2 + \frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)^{-1}.$$

Таким образом, заряд совершает здесь периодическое движение по замкнутой 8-образной траектории (с осью вдоль оси Y).

§ 47. Эффект Допплера

Пользуясь волновым 4-вектором, легко вывести формулы преобразования ω и $\mathbf{k}$ из одной системы координат в другую. Общие формулы (6,2) преобразования 4-векторов дают

$$k_4 = \frac{k_4' + i\frac{V}{c}k_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

или, подставляя значения компонент k_i,

$$\omega = \frac{\omega' + Vk_x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}};$$

но $k_x = k\cos\alpha = (\omega/c)\cos\alpha$, где α — угол между направлением $\mathbf{k}$ и осью X. Таким образом, мы находим:

$$\omega = \omega'\frac{1 + \frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{47,1}$$

Это есть точная формула для эффекта Допплера. При $V \ll c$ она переходит в

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right). \tag{47,2}$$

Для $k_1 = k_x$ имеем:

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

или, подставляя $k_x = (\omega/c)\cos\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}\cos\alpha'}. \tag{47,3}$$

Эта формула совпадает с ранее выведенной в § 5 формулой для аберрации.

Если выбрать ось X по направлению распространения волны, то тензор энергии-импульса монохроматической волны будет иметь, как и у всякой плоской волны (см. § 46), следующие отличные от нуля компоненты:

$$T_{11} = W, \quad T_{14} = iW, \quad T_{44} = -W.$$

Вводя волновой 4-вектор k_i, можно записать эти соотношения в тензорном виде как

$$T_{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k_i k_k. \tag{47,4}$$

Произведения $k_i k_k$ составляют сами по себе симметрический тензор второго ранга. Поэтому из формулы (47,4) следует, что величина W/ω^2 есть скаляр. При переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой W/ω^2 остаётся, следовательно, неизменным, а плотность энергии должна преобразовываться как квадрат частоты. Имея в виду (47,4), находим, таким образом, следующую формулу преобразования:

$$W = W' \frac{\left(1 + \frac{V}{c}\cos\alpha\right)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{47,5}$$

Поскольку $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, то можно заключить, что абсолютные величины поля монохроматической волны преобразуются как первая степень частоты.

Наконец, отметим, что поскольку W и W', согласно (47,5), просто пропорциональны друг другу, то эту формулу можно применять и к плоской волне, являющейся наложением ряда монохроматических волн, т. е., по существу, ко всякой плоской волне.

§ 48. Поляризация

Рассмотрим электрическое поле плоской монохроматической волны:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}$$

(всё, что будет нами сказано, относится в той же мере и к магнитному полю). $\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор; его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Очевидно, $\mathbf{E}_0$ можно всегда представить в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{i\alpha},$$

причём выбрать α таким образом, чтобы вектор $\mathbf{b}$ (вообще говоря, тоже комплексный) имел действительный квадрат. Электрическое поле приобретает тогда вид

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{b}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\alpha)}\right\}. \tag{48,1}$$

Напишем $\mathbf{b}$ в виде $\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2$, где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — два действительных вектора. Поскольку $b^2 = b_1^2 - b_2^2 - 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ должно быть действительным, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, т. е. векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно перпендикулярны. Выберем систему координат с осями Y и Z, параллельными $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ (ось X — по направлению распространения волны). Тогда из (48,1) мы находим:

$$\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha), \\ E_z &= b_2 \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha). \end{aligned} \tag{48,2}$$

Коэффициенты b_1 и b_2 называются амплитудами волны; выражение, стоящее как аргумент у cos или sin, называется фазой волны.

Из (48,2) непосредственно следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{48,3}$$

Из этих формул мы видим, что в каждой точке пространства вектор электрического поля такой волны вращается в плоскости, параллельной плоскости YZ, причём его конец описывает эллипс (48,3). Такая волна называется эллиптически поляризованной. Если $b_1 = b_2$, то эллипс (48,3) превращается в круг, т. е. вектор вращается, оставаясь постоянным по абсолютной величине. В этом случае говорят, что волна поляризована по кругу.

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае прямолинейно поляризованной или поляризованной в плоскости [1]). Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух плоско поляризованных.

§ 49. Спектральное разложение

Всякую волну можно представить в виде наложения ряда монохроматических волн с различными частотами. Математически это означает разложение поля волны в ряд или интеграл Фурье. Такое разложение называют также спектральным разложением.

Если поле периодично во времени (с периодом T), то оно может быть разложено в ряд Фурье вида [2])

$$f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt}, \tag{49,1}$$

где $\omega_0=2\pi/T$, а «компоненты Фурье» f_n равны:

$$f_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f e^{i\omega_0 nt}\,dt. \tag{49,2}$$

Заметим, что поскольку f действительно, то

$$f_{-n}=f_n^*. \tag{49,3}$$

---

[1]) По исторической традиции установилась неудачная терминология, согласно которой плоскостью поляризации света называют плоскость, в которой лежит вектор магнитного поля, а плоскость электрического поля называют плоскостью колебаний света.

[2]) Мы говорим здесь, для простоты, о чисто периодическом поле, создающемся чисто периодическим движением зарядов. Надо, однако, иметь в виду, что стационарное (вернее, почти стационарное) движение системы частиц является обычно непериодическим, а, как говорят, условно периодическим (см., например, «Механика», § 62). Такое движение характеризуется не одним, а целым рядом различных периодов (и, соответственно, частот). Все величины, характеризующие такое движение (и создаваемое им поле), могут быть разложены не в простой, а в обобщённый ряд Фурье, который может быть написан, формально, в аналогичном (49,1) виде:

$$f=\sum_{\omega} f_\omega e^{-i\omega t},$$

с той разницей, что суммирование производится не по частотам, являющимся целыми кратными одной величины ω_0, а по частотам вида

$$\omega=\sum_{l=1}^{s} n^{(l)}\omega^{(l)},$$

где $n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(s)}$ — положительные или отрицательные целые числа, а $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(s)}$ — так называемые основные частоты движения.

Средняя интенсивность волны (интенсивность определяется квадратом поля) имеет вид:

$$\overline{f^2} = f_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \qquad (49,4)$$

(при усреднении надо помнить, что осциллирующие множители вида $e^{\pm i\omega_0 nt}$ дают в среднем нуль). Таким образом, средняя интенсивность волны представляется в виде суммы интенсивностей её монохроматических составляющих.

Непериодическое поле f можно разложить в интеграл Фурье, если функция $f(t)$ удовлетворяет определённым условиям (функции, удовлетворяющие этим условиям, обычно обращаются в нуль на бесконечности). Тогда спектральное разложение волны имеет вид:

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega, \qquad (49,5)$$

где компоненты Фурье поля равны

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{i\omega t}\, dt, \qquad (49,6)$$

причём, аналогично (49,3):

$$f_{-\omega} = f_\omega^*. \qquad (49,7)$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2\, dt$ и выразим его через интенсивности отдельных монохроматических компонент. Пользуясь (49,5) и (49,6), находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{-i\omega t} dt =$$
$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega f_{-\omega}\, d\omega,$$

или, подставляя $f_{-\omega} = f_\omega^*$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\omega|^2\, d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |f_\omega|^2\, d\omega. \qquad (49,8)$$

Часто приходится, однако, иметь дело с полями, не меняющими со временем существенным образом своего характера (в частности, не исчезающими при $t \to \pm\infty$) и в то же время не строго периодическими. Такое поле не может быть азложено ни в ряд, ни в интеграл Фурье (интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\omega t}\,dt$ расходятся). Однако и в этом случае можно произвести разложение на монохроматические волны следующим образом.

Рассмотрим величину f в некотором большом промежутке времени от $-T/2$ до $+T/2$ и разложим её в этом промежутке в ряд Фурье вида (49,1). Определим теперь среднюю (по промежутку времени T) интенсивность волны. Ввиду того, что T предполагается очень большим, интервалы $\omega_0 = 2\pi/T$ между последовательными частотами очень малы, и мы можем перейти от суммы (49,4) к интегралу по $dn = \frac{d\omega}{\omega_0}$:

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f^2\,dt = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{\infty} |f_n|^2 \frac{d\omega}{\omega_0},$$

или, подставляя (49,2):

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f^2\,dt = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\pi T}\left|\int\limits_{-T/2}^{T/2} fe^{i\omega t}\,dt\right|^2 d\omega. \tag{49,9}$$

Таким образом, средняя интенсивность представлена в виде суммы (интеграла) интенсивностей монохроматических компонент. Формула (49,9) даёт возможность вычислить интенсивность в любом бесконечно малом интервале $d\omega$ частот.

При $T \to \infty$ $\overline{f^2}$ стремится к некоторому конечному пределу. Ввиду этого и из выражения (49,9) следует, что интеграл $\int\limits_{-T}^{+T} fe^{i\omega t}\,dt$ при стремлении T к бесконечности растёт как $\sqrt{T}$.

§ 50. Частично поляризованный свет

Всякая монохроматическая волна по самому своему определению непременно поляризована. Обычно, однако, приходится иметь дело с волнами лишь почти монохроматическими, содержащими частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$. Рассмотрим такую волну, и пусть ω есть некоторая средняя её частота. Тогда её поле (в заданной точке пространства) можно написать в виде $\mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}_0(t)\,e^{-i\omega t}\}$, где комплексная амплитуда $\mathbf{A}_0(t)$ является некоторой медленно меняющейся функцией времени (у строго монохроматической волны было бы $\mathbf{A}_0 = \text{const.}$). Поскольку $\mathbf{A}_0$ определяет поляризацию волны (см. § 48), то это значит, что в каждой точке волны её поляризация меняется со временем; такую волну называют частично поляризованной. В частных случаях, впрочем, зависимость $\mathbf{A}_0(t)$ от времени может быть такой, что волна всё же является вполне поляризованной; для этого необходимо, чтобы оставалось неизменным со временем отношение обеих компонент $\mathbf{A}_0$, т. е. отношение (действительных) амплитуд двух взаимно перпендикулярных компонент поля волны и разность их фаз.

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально посредством пропускания исследуемого света через различные тела[1]), после чего измеряется интенсивность прошедшего через тело света. С математической точки зрения это означает, что о свойствах поляризации света делаются заключения, исходя из значений некоторых квадратичных функций его поля. При этом, разумеется, идёт речь о средних по времени значениях этих функций. Квадратичная функция поля состоит из членов, пропорциональных произведениям A_iA_k, $A_i^*A_k^*$ или $A_iA_k^*$, где A_i — компоненты, например, векторного потенциала. Произведения вида $A_iA_k = A_{0i}A_{0k}e^{-2i\omega t}$ и $A_i^*A_k^* = A_{0i}^*A_{0k}^*e^{2i\omega t}$, содержащие быстро осциллирующие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, при усреднении по времени дают нуль. Произведения же $A_iA_k^* = A_{0i}A_{0k}^*$ такого множителя не содержат, и потому их средние значения отличны от нуля. Таким образом, мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{ik} = \overline{A_{0i}A_{0k}^*}. \tag{50,1}$$

Поскольку вектор $\mathbf{A}_0$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной направлению волны, то тензор J_{jk} имеет всего четыре компоненты (в этом параграфе индексы i, k подразумеваются пробегающими всего два значения: i, $k = 1, 2$). Из определения J_{ik} видно, что между компонентами этого тензора имеется соотношение

$$J_{ik} = \overset{*}{J}_{ki}. \tag{50,2}$$

Приведём тензор J_{ik} к простейшему виду. Пусть n_i есть «единичный» комлексный вектор, нормированный так, что $n_in^* = 1$. Определим n_i так, чтобы

$$J_{ik}n_k = \lambda n_i, \tag{50,3}$$

аналогично тому, как это делается при приведении симметричного тензора к главным осям. Уравнение (50,3) можно написать в виде

$$(J_{ik} - \lambda\delta_{ik})\, n_k = 0.$$

Для того чтобы эта система однородных алгебраических уравнений первой степени (по n_k) имела отличные от нуля решения, необходимо, как известно, чтобы был равен нулю определитель:

$$|\, J_{ik} - \lambda\delta_{ik}\,| = 0, \tag{50,4}$$

[1]) Например, через призмы Николя.

откуда определяются два значения λ, которые мы обозначим через λ_1 и λ_2; подставляя эти значения поочерёдно в уравнения (50,3), мы определим из них два вектора: $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$.

Легко показать[1]), что величины λ_1 и λ_2 действительны (и положительны), а векторы $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$ «взаимно перпендикулярны», т. е. удовлетворяют условию

$$n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0. \tag{50,5}$$

Мы можем теперь написать тензор J_{ik} в виде

$$J_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)*} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)*}. \tag{50,6}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что это выражение действительно удовлетворяет уравнению (50,3).

Если свет вполне поляризован, то $A_0 = \text{const.}$ и J_{ik} равно просто $A_{0i} \overset{*}{A}_{0k}$ (без усреднения). Но каждый из двух членов в (50,6) имеет именно такой вид — простого произведения двух компонент постоянного вектора ($\sqrt{\lambda_1} n_i^{(1)}$ или $\sqrt{\lambda_2} n_i^{(2)}$) и его комплексно сопряжённого. Другими словами, каждый из этих членов можно рассматривать как вполне поляризованную (вообще говоря, эллиптически) волну. Далее, мы видим, что в (50,6) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе волны можно рассматривать как физически независимые друг от друга, или, как гово-

---

[1]) Умножая (50,3) с обеих сторон на $\overset{*}{n}_i$, имеем:

$$\lambda n_i \overset{*}{n}_i = \lambda = J_{ik} \overset{*}{n}_i n_k = \overline{|A_{0i} n_i|^2}.$$

Но среднее значение квадрата модуля всякой величины есть величина действительная и положительная.

Для доказательства (50,5) пишем уравнения

$$J_{ik} n_k^{(1)} = \lambda_1 n_i^{(1)}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} = \lambda_2 n_i^{(2)}$$

и умножим первое из них на $n_i^{(2)*}$, а второе на $n_i^{(1)*}$:

$$J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)*}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} n_i^{(1)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)*}.$$

Возьмём комплексно сопряжённое от второго уравнения, воспользовавшись тем, что $J_{ik}^* = J_{ki}$:

$$J_{ik}^* n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ki} n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)},$$

после чего вычтем его почленно из первого уравнения; мы находим тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0,$$

откуда и следует (50,5).

рят, некогерентные. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения $\overline{A_i^{(1)}A_k^{(2)}}$ равно произведению $\overline{A_i^{(1)}}\,\overline{A_k^{(2)}}$ средних значений $\overline{A_i^{(1)}}$ и $\overline{A_k^{(2)}}$, и поскольку каждое из них равно нулю, то и $\overline{A_i^{(1)}A_k^{(2)}}=0$.

В § 48 мы видели, что можно всегда выбрать комплексную амплитуду так, чтобы из двух взаимно перпендикулярных компонент одна была чисто действительная, а другая — чисто мнимая; их абсолютные величины определят тогда амплитуды соответствующих колебаний.

Таким образом, мы можем написать

$$n_1^{(1)}=b_1,\quad n_2^{(1)}=ib_2, \tag{50,7}$$

где b_1 и b_2 действительны (и в силу условия нормировки $n_i^{(1)}n_i^{(1)*}=1$ связаны соотношением $b_1^2+b_2^2=1$). Тогда $n_i^{(2)}$ напишется в виде

$$n_1^{(2)}=ib_2,\qquad n_2^{(2)}=b_1 \tag{50,8}$$

(так, чтобы было $n_i^{(1)}n_i^{(2)*}=0$). Эти выражения показывают, что эллипсы обоих эллиптически поляризованных колебаний подобны (имеют одинаковые отношения осей), причём один из них повёрнут на прямой угол относительно другого.

Таким образом, мы приходим к результату, что всякую частично поляризованную волну можно представить как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны.

Полная интенсивность J света пропорциональна просто квадрату поля, т. е. сумме диагональных компонент тензора J_{ik}:

$$J=J_{ii}=\lambda_1+\lambda_2. \tag{50,9}$$

Отношение же

$$\rho=\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{50,10}$$

меньшей из величин λ к большей характеризует степень деполяризации света. Если свет полностью поляризован, то одна из величин, λ_1 или λ_2, равна нулю; очевидно, что тогда $\rho=0$. Противоположным случаем является свет, у которого $\lambda_1=\lambda_2$, так что $\rho=1$; такой свет называется неполяризованным или естественным. Тот факт, что уравнение (50,3) имеет в этом случае всего один корень для λ, означает, что тензор J_{ik} имеет вид

$$J_{ik}=\lambda_0\delta_{ik}, \tag{50,11}$$

где λ_0 есть общее значение λ_1 и λ_2. Для вектора n_i эти уравнения дают теперь бесконечное множество значений. Другими словами, естественный свет можно рассматривать как наложение двух поляризованных волн с одинаковой интенсивностью, оси поляризации которых расположены любым образом (в плоскости, перпендикулярной к направлению света).

§ 51. Разложение электростатического поля

Поле, созданное зарядами, тоже можно формально разложить по плоским волнам (в интеграл Фурье). Это разложение, однако, весьма существенно отличается от разложения электромагнитных волн в пустоте. Действительно, поле зарядов не удовлетворяет однородному уравнению д'Аламбера (44,8), а потому и каждый член разложения этого поля не удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $k^2 = \omega^2/c^2$, которое имеет место для плоских монохроматических электромагнитных волн.

В частности, если формально представить электростатическое поле в виде наложения плоских волн, то «частота» этих волн будет, очевидно, равна нулю, так как рассматриваемое поле не зависит от времени; волновые же векторы, конечно, отличны от нуля.

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом e, находящимся в начале координат. Потенциал φ этого поля определяется уравнением (см. § 35)

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}). \tag{51,1}$$

Разложим φ в интеграл Фурье, т. е. представим его в виде наложения плоских волн вида $\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}$:

$$\varphi = \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \tag{51,2}$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор Лапласа, находим

$$\Delta\varphi = -\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int k^2 e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z,$$

так что компонента Фурье $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$ от выражения $\Delta\varphi$ есть

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, можно найти $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (51,1),

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int 4\pi e\delta(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}} dx\, dy\, dz = -\frac{e}{2\pi^2}.$$

Сравнивая оба полученных выражения для $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, находим

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\frac{1}{k^2}. \tag{51,3}$$

Эта формула и решает поставленную задачу.

Аналогично потенциалу φ можно разложить и поле

$$\mathbf{E} = \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z. \tag{51,4}$$

С помощью (51,2) имеем

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z = -\int\int\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{rk}}\, dk_x\, dk_y\, dk_z.$$

Сравнивая с (51,4), находим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2}\frac{e}{2\pi^2}. \tag{51,5}$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоново поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

§ 52. Собственные колебания поля

Рассмотрим электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объёме пространства [1]). Для упрощения дальнейших вычислений мы предполагаем, что этот объём обладает формой прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A, B, C. Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье (по трём координатам). Это разложение можно написать (например, для векторного потенциала) в виде:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}. \tag{52,1}$$

Суммирование производится здесь по всем возможным значениям вектора $\mathbf{k}$, компоненты которого пробегают, как известно, значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52,2}$$

где n_x, n_y, n_z — положительные и отрицательные целые числа. Коэффициенты $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ должны удовлетворять соотношениям $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}$, поскольку $\mathbf{A}$ должно быть действительным. Из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ следует, что для каждого $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0, \tag{52,3}$$

т. е. комплексные векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ «перпендикулярны» соответствующим волновым векторам $\mathbf{k}$. Векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ являются, конечно, функциями времени; они удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{52,4}$$

[1]) Речь идёт о поле в отсутствии зарядов («свободное излучение»).

Если размеры A, B, C выбранного объёма достаточно велики, то соседние значения k_x, k_y, k_z (у которых n_x, n_y, n_z отличаются на единицу) почти равны друг другу. В этом случае мы можем говорить о числе возможных значений k_x, k_y, k_z в небольших интервалах Δk_x, Δk_y, Δk_z.

Поскольку соседние значения, скажем k_x, соответствуют значениям n_x, отличающимся на единицу, то число Δn_x возможных значений k_x в интервале Δk_x равно просто соответствующему интервалу значений n_x. Таким образом, мы находим

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

Полное число Δn возможных значений вектора $\mathbf{k}$ с компонентами в интервалах Δk_x, Δk_y, Δk_z равно произведению $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, т. е.

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x \, \Delta k_y \, \Delta k_z, \tag{52,5}$$

где $V = ABC$ есть объём поля.

Легко определить отсюда число возможных значений волнового вектора с абсолютной величиной в интервале Δk и направлением в элементе телесного угла Δo. Для этого надо только перейти к сферическим координатам в «пространстве k_x, k_y, k_z» и написать вместо $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ элемент объёма в этих координатах. Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \, \Delta k \, \Delta o. \tag{52,6}$$

Наконец, полное число значений волнового вектора с абсолютными величинами k в интервале Δk и всеми направлениями равно (пишем 4π вместо Δo)

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \, \Delta k. \tag{52,7}$$

Векторы $\mathbf{A}_\mathbf{k}$ как функции времени сводятся к простым периодическим функциям с частотами $\omega_k = ck$ [ср. уравнение (52,4)]. Представим разложение поля в таком виде, чтобы оно являлось разложением на бегущие плоские волны. Для этого напишем ряд (52,1), перегруппировав в нём члены, в виде

$$\mathbf{A} = \sum_\mathbf{k} (\mathbf{a}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}} + \overset{*}{\mathbf{a}}_\mathbf{k} e^{-i\mathbf{kr}}) \tag{52,8}$$

(явным образом выражающим действительность $\mathbf{A}$) и будем считать, что каждое из $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega_k t}$:

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{52,9}$$

Тогда каждый отдельный член в сумме (52,8) будет функцией только от разности $\mathbf{kr} - \omega_k t$, что соответствует волне, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{k}$.

Вычислим полную энергию

$$\mathscr{E}=\frac{1}{8\pi}\int(E^2+H^2)\,dV$$

рассматриваемого поля в объёме V, выразив её через величины $\mathbf{a_k}$. Для электрического поля имеем

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}=-\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}}(\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}+\dot{\mathbf{a}}^*_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{kr}}),$$

или, принимая во внимание (52,9):

$$\mathbf{E}=i\sum_{\mathbf{k}}k(\mathbf{a_k}e^{i\mathbf{kr}}-\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{kr}}). \tag{52,10}$$

Для магнитного поля $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ находим

$$\mathbf{H}=i\sum_{\mathbf{k}}([\mathbf{ka_k}]e^{-i\mathbf{kr}}-[\mathbf{ka}^*_{\mathbf{k}}]e^{-i\mathbf{kr}}). \tag{52,11}$$

При вычислении квадратов этих сумм надо иметь в виду, что все произведения членов с волновыми векторами $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$ дают нуль при интегрировании по всему объёму. Действительно, такие члены содержат множители вида $e^{\pm i\mathbf{qr}}$, $\mathbf{q}=\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'$, а интеграл, например,

$$\int\limits_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx$$

с целым отличным от нуля n_x равен нулю. По той же причине обращаются в нуль произведения, содержащие множители $e^{\pm 2i\mathbf{kr}}$. В членах же, в которых экспоненциальные множители выпадают, интегрирование по dV даёт просто объём V.

В результате мы найдём:

$$\mathscr{E}=\frac{V}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}\left\{k^2\mathbf{a_k}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}+[\mathbf{ka_k}][\mathbf{ka}^*_{\mathbf{k}}]\right\}.$$

Но ввиду того, что $\mathbf{a_k}\mathbf{k}=0$, имеем

$$[\mathbf{ka_k}][\mathbf{ka}^*_{\mathbf{k}}]=k^2\mathbf{a_k}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}},$$

и мы получаем окончательно

$$\mathscr{E}=\sum_{\mathbf{k}}\mathscr{E}_{\mathbf{k}},\qquad \mathscr{E}_{\mathbf{k}}=\frac{k^2V}{2\pi}\mathbf{a_k}\mathbf{a}^*_{\mathbf{k}}. \tag{52,12}$$

Таким образом, полная энергия поля выражается в виде суммы энергий $\mathscr{E}_{\mathbf{k}}$, связанных с каждой из плоских волн в отдельности.

Совершенно аналогичным образом можно вычислить полный импульс поля

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{EH}]\,dV,$$

причём получается

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k}\frac{\mathscr{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \tag{52,13}$$

Этот результат можно было ожидать заранее ввиду известного соотношения между энергией и импульсом плоских волн (см. § 45).

Введением разложения (52,8) [или (52,1)] достигается описание поля посредством дискретного ряда переменных (вектора $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$), вместо описания непрерывным рядом переменным, каковым по существу является описание потенциалом $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, задающимся во всех точках пространства. Мы произведём теперь преобразование переменных $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, в результате которого окажется возможным придать уравнениям поля вид, аналогичный каноническим уравнениям (уравнениям Гамильтона) механики.

Введём действительные «канонические переменные» $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ согласно соотношениям

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \alpha(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}),\\ \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = -i\omega_k\alpha(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \overset{*}{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}.\end{gathered} \tag{52,14}$$

Здесь α есть некоторая действительная постоянная, которую мы определим ниже таким образом, чтобы соотношение $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$ между «обобщёнными импульсами» и «координатами» действительно было следствием уравнений движения.

Функция Гамильтона поля получается подстановкой в энергию (52,12) величин $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, выраженных через $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$:

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathscr{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{V}{8\pi c^2\alpha^2}(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2).$$

Для того чтобы уравнение Гамильтона $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$ совпадало с $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$, надо положить $V/8\pi c^2\alpha^2 = {}^1/_2$, т. е.

$$\alpha = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}. \tag{52,15}$$

Тогда функция Гамильтона примет вид

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2) = \sum_{\mathbf{k}} \mathscr{H}_{\mathbf{k}}. \tag{52,16}$$

«Уравнения движения»

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}} = -\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}}, \quad \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$$

приводят к уравнениям

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}+\omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}=0, \tag{52,17}$$

т. е. тождественны с уравнениями поля.

Каждый из векторов $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ перпендикулярен к волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты. Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей бегущей волны. Обозначив две компоненты вектора $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) посредством $Q_{\mathbf{k}j}$, $j=1,\ 2$, имеем $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2=\sum\limits_j Q_{\mathbf{k}j}^2$, и аналогично для $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$. Тогда

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k}j}\mathscr{H}_{\mathbf{k}j},\qquad \mathscr{H}_{\mathbf{k}j}=\frac{1}{2}\left(P_{\mathbf{k}j}^2+\omega_k^2Q_{\mathbf{k}j}^2\right). \tag{52,18}$$

Мы видим, что функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$, каждый из которых содержит только по одной паре величин $Q_{\mathbf{k}j}$, $P_{\mathbf{k}j}$. Каждый такой член соответствует бегущей волне с определёнными волновым вектором и поляризацией. При этом $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$ имеет вид функции Гамильтона одномерного «осциллятора», совершающего простые гармонические колебания[1]. Поэтому о полученном разложении говорят иногда как о разложении поля на осцилляторы.

Выпишем формулы, выражающие в явном виде поле через переменные $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$. Из (52,14) и (52,15) имеем

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}=\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}-i\omega_k\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\right),\qquad \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*=-\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}+i\omega_k\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\right). \tag{52,19}$$

Подставляя эти выражения в (52,8), найдём векторный потенциал поля:

$$\mathbf{A}=2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k}\left(ck\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\cos\mathbf{kr}-\mathbf{P}_{\mathbf{k}}\sin\mathbf{kr}\right). \tag{52,20}$$

Для электрического и магнитного полей получим

$$\mathbf{E}=2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{\mathbf{k}}\left(ck\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}\sin\mathbf{kr}+\mathbf{P}_{\mathbf{k}}\cos\mathbf{kr}\right), \tag{52,21}$$

$$\mathbf{H}=2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k}\left(ck\,[\mathbf{kQ}_{\mathbf{k}}]\sin\mathbf{kr}+[\mathbf{kP}_{\mathbf{k}}]\cos\mathbf{kr}\right).$$

[1]) См., например, «Механика», § 30.

ГЛАВА VII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

§ 53. Геометрическая оптика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление её распространения и амплитуда везде одинаковы. Произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

Однако в большом числе случаев электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, отличаются тем свойством, что в каждом небольшом участке пространства их можно рассматривать как плоские. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести так называемые волновые поверхности, т. е. поверхности, во всех точках которых фаза волны (в данный момент времени) одинакова. Волновые поверхности плоской волны представляют собой, очевидно, плоскости, перпендикулярные к направлению распространения волны. В каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности. При этом можно ввести понятие лучей — линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет геометрической оптики. Геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы. Другими словами, геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \to 0$.

Займёмся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики — уравнения, определяющего направление лучей. Пусть f есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$). В плоской монохроматической волне f имеет вид

$$f = ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha)} = ae^{i(k_i x_i + \alpha)} \qquad (53,1)$$

(мы опускаем знак Re; везде подразумевается действительная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}. \tag{53,2}$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат и времени, а фаза ψ, называемая также эйконалом, не имеет простого вида, как в (53,1). Существенно, однако, что эйконал ψ является большой величиной. Это видно непосредственно из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \to 0$.

В малых участках пространства и интервалах времени эйконал ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчёта времени выбраны в рассматриваемом участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат). Сравнивая это выражение с (53,1), мы можем написать

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad}\psi, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{53,3}$$

что и соответствует тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую. В четырёхмерном виде соотношения (53,3) напишутся как

$$k_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \tag{53,4}$$

где k_i — волновой 4-вектор.

Мы видели в § 46, что между компонентами 4-вектора k_i имеется соотношение $k_i^2 = 0$. Подставляя сюда (53,4), находим уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{53,5}$$

Это уравнение, называемое уравнением эйконала, является основн ы уравнением геометрической оптики.

Уравнение эйконала можно вывести также и при помощи непосредственного предельного перехода $\lambda \to 0$ в волновом уравнении. Поле f удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Подставляя сюда $f = ae^{i\psi}$, находим

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2}e^{i\psi} + 2i\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}e^{i\psi} + if\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 f = 0. \tag{53,6}$$

Но эйконал ψ, как было выше указано, есть большая величина; поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по сравнению с четвёртым, и мы приходим снова к уравнению (53,5).

Мы приведём здесь ещё ряд соотношений, которые, однако, в применении к распространению света в пустоте приводят только к вполне очевидным результатам. Тем не менее мы приводим их здесь, имея в виду, что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах.

Из формы уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц. Движение материальной частицы определяется уравнением Гамильтона-Якоби (22,12):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\right)^2+m^2c^2=0.$$

Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка и второй степени. Как известно, действие S связано с импульсом $\mathbf{p}$ и функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ частицы посредством соотношений

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathscr{H}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (53,3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота — роль функции Гамильтона, т. е. энергии частицы. Абсолютная величина k волнового вектора связана с частотой посредством формулы $k=\omega/c$. Мы видим, что это соотношение аналогично соотношению $p=\mathscr{E}/c$ между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Ввиду указанной аналогии мы можем непосредственно написать подобное уравнение для лучей

$$\dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{53,7}$$

В пустоте $\omega=ck$, так что $\dot{\mathbf{k}}=0$, $\mathbf{v}=c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления распространения), т. е., как и должно быть, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью c.

Аналогия между волновым вектором волны и импульсом частицы в особенности ясно проявляется в следующем обстоятельстве. Рассмотрим волну, представляющую собой наложение монохроматических волн с частотами, лежащими в некотором небольшом интервале, и занимающую некоторую конечную область пространства (так называемый «волновой пакет»). Вычислим 4-импульс поля этой волны, воспользовавшись формулой (31,6) с тензором энергии-импульса (47,4) (для каждой монохроматической компоненты). Заменяя в этой формуле k_i некоторым его средним значением, получим выражение вида

$$P_i = Ak_i, \tag{53,8}$$

где коэффициент пропорциональности A между двумя 4-векторами P_i и k_i есть некоторый скаляр. В трёхмерном виде это соотношение даёт:

$$\mathbf{P} = A\mathbf{k}, \quad \mathscr{E} = A\omega. \tag{53,9}$$

Таким образом, мы видим, что импульс и энергия волнового пакета преобразуются при переходе от одной системы отсчёта к другой соответственно как волновой вектор и частота.

Продолжая аналогию, можно установить для геометрической оптики принцип, аналогичный принципу наименьшего действия в механике. Однако его при этом нельзя будет написать в гамильтоновской форме, $\delta\int L\,dt = 0$, так как оказывается невозможным ввести для лучей функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц. Действительно, функция Лагранжа L частицы связана с функцией Гамильтона $\mathscr{H}$ посредством $L = \mathbf{p}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}} - \mathscr{H}$. Заменяя функцию Гамильтона частотой ω, а импульс — волновым вектором $\mathbf{k}$, мы должны были бы написать для функции Лагранжа в оптике $\mathbf{k}\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} - \omega$. Но это выражение равно нулю, поскольку $\omega = ck$. Невозможность введения функции Лагранжа для лучей видна, впрочем, и непосредственно из указанного выше обстоятельства, что распространение лучей аналогично движению частиц с массой, равной нулю.

Если волна обладает определённой постоянной частотой ω, то зависимость её поля от времени определяется множителем вида $e^{-i\omega t}$. Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать:

$$\psi = -\omega t + \psi_1(x, y, z), \tag{53,10}$$

где ψ_1 — функция только от координат. Уравнение эйконала (53,5) принимает теперь вид

$$(\operatorname{grad}\psi_1)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{53,11}$$

Волновые поверхности являются поверхностями постоянного эйконала, т. е. семейством поверхностей вида $\psi_1(x, y, z) = \text{const}$. Лучи же, в каждой точке нормальны к соответствующей волновой поверхности; их направление определяется градиентом $\nabla\psi_1$.

Как известно, в случае, когда энергия постоянна, принцип наименьшего действия для частицы можно написать также и в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{l} = 0,$$

где интегрирование производится по траектории частицы между двумя заданными её положениями. Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и дифференциалов координат частицы. Аналогичный принцип для лучей называется принципом Ферма. В этом случае мы можем написать по аналогии:

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{l} = 0. \tag{53,12}$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, и мы получаем ($d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \tag{53,13}$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

§ 54. Интенсивность

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать как пучок лучей. Лучи, однако, сами по себе определяют лишь направление распространения света в каждой точке; остаётся вопрос о распределении интенсивности света в пространстве.

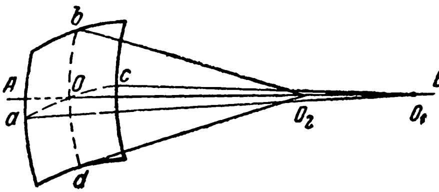

Рис. 4.

Выделим на какой-либо из волновых поверхностей рассматриваемого пучка бесконечно малый элемент. Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря различных, главных радиуса кривизны. Пусть ac и bd (рис. 4) есть элементы главных кругов кривизны, проведённые на данном элементе волновой поверхности. Тогда лучи, проходящие через точки a и c, пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O_1, а лучи, проходящие через b и d, пересекутся в другом центре кривизны O_2.

При данных углах раствора лучей, исходящих из O_1 и O_2, длины отрезков ac и bd пропорциональны, очевидно, соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т. е. длинам O_1a и O_2b); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd, т. е. пропорциональна R_1R_2. Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченной определённым рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально R_1R_2.

С другой стороны, интенсивность, т. е. поток энергии через единицу поверхности, обратно пропорциональна площади поверхности, через которую проходит данное количество световой энергии. Таким образом, мы приходим к выводу, что интенсивность

$$I = \frac{\text{const.}}{R_1R_2}. \tag{54,1}$$

Эту формулу надо понимать следующим образом. На каждом данном луче (AB на рис. 4) существуют определённые точки O_1 и O_2, являющиеся центрами кривизны (в точках пересечения с лучом) всех волновых поверхностей, пересекающих данный луч. Расстояния OO_1 и OO_2 от точки O пересечения волновой поверхности с лучом до точек O_1 и O_2 являются радиусами кривизны R_1 и R_2 волновой поверхности в точке O. Таким образом, формула (54,1) определяет изменение интенсивности света вдоль данного луча в функции от расстояний до определённых точек на этом луче. Подчеркнём, что эта формула непригодна для сравнения интенсивностей в разных точках одной и той же волновой поверхности.

Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля поля, то для изменения самого поля вдоль луча мы можем написать

$$f = \frac{\text{const.}}{\sqrt{R_1R_2}} e^{ikR}, \tag{54,2}$$

где в фазовом множителе e^{ikR} под R может подразумеваться как R_1, так и R_2; величины e^{ikR_1} и e^{ikR_2} отличаются друг от друга только постоянным (для данного луча) множителем, поскольку разность $R_1 - R_2$, расстояние между обоими центрами кривизны, постоянна.

Если оба радиуса кривизны волновой поверхности совпадают, то (54,1) и (54,2) имеют вид:

$$I = \frac{\text{const.}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const.}}{R} e^{ikR}. \tag{54,3}$$

Это имеет место, в частности, всегда в тех случаях, когда свет испускается точечным источником (волновые поверхности являются тогда концентрическими сферами, а R — расстоянием до источника света).

Из (54,1) мы видим, что интенсивность обращается в бесконечность в точках $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, т. е. в центрах кривизны волновых поверхностей. Применяя это ко всем лучам в пучке, находим, что интенсивность света в данном пучке обращается в бесконечность, вообще говоря, на двух поверхностях — геометрическом месте всех центров кривизны волновой поверхности. Эти поверхности носят название каустик. В частном случае пучка лучей со сферическими волновыми поверхностями обе каустики сливаются в одну точку (фокус).

Отметим, что, согласно известным из дифференциальной геометрии свойствам геометрического места центров кривизны семейства поверхностей, лучи касаются каустик.

Надо иметь в виду, что (при выпуклых волновых поверхностях) центры кривизны волновых поверхностей могут оказаться лежащими не на самих лучах, а на их продолжениях за оптическую систему, от которой они исходят. В таких случаях говорят о мнимых каустиках (или фокусах). Интенсивность света при этом нигде не обращается в бесконечность.

Что касается обращения интенсивности в бесконечность, то в действительности, разумеется, интенсивность в точках каустики делается большой, но остаётся конечной (см. задачу к § 59). Формальное обращение в бесконечность означает, что приближение геометрической оптики становится во всяком случае неприменимым вблизи каустик. С этим же обстоятельством связано и то, что изменение фазы вдоль луча может определяться формулой (54,2) только на участках луча, не включающих в себя точек его касания с каустиками. Ниже (в § 59) будет показано, что в действительности при прохождении мимо каустики фаза поля уменьшается на $\pi/2$. Это значит, что если на участке луча до его касания первой каустики поле пропорционально множителю e^{ikx} (x — координата вдоль луча), то после прохождения мимо каустики поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi/2)}$. То же самое произойдёт вблизи точки касания второй каустики, и за этой точкой поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi)}$.

§ 55. Угловой эйконал

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального. Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы. Оказывается, однако, возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела. При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика. Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, оптическими системами.

В силу указанной в § 53 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся сначала прямолинейно в пустоте, затем проходящих через какое-нибудь электромагнитное поле и снова выходящих из этого поля в пустоту. Для определённости мы будем, однако, ниже говорить всё время о распространении лучей света.

Мы видели в предыдущем параграфе, что уравнение эйконала, определяющее распространение лучей, может быть написано в виде (53,11): $(\nabla\psi_1)^2 = \omega^2/c^2$ (для света с определённой частотой). Ниже мы будем для удобства обозначать посредством ψ эйконал, делённый на постоянную величину ω/c. Тогда основное уравнение геометрической оптики будет иметь вид

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{55,1}$$

Каждое решение этого уравнения описывает собой определённый пучок лучей, причём направление луча, проходящего через данную точку пространства, определяется градиентом ψ в этой точке. Для наших целей, однако, такое описание недостаточно, поскольку мы ищем общие соотношения, определяющие прохождение через оптические системы не какого-либо одного определённого пучка лучей, а соотношения, относящиеся к любым лучам. Поэтому мы должны пользоваться эйконалом, взятым в таком виде, в котором он описывал бы все вообще возможные лучи света, т. е. лучи, проходящие через любую пару точек в пространстве. В обычной своей форме эйконал $\psi(\mathbf{r})$ есть фаза луча из некоторого пучка, проходящего через точку $\mathbf{r}$. Теперь же мы должны ввести эйконал как функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ координат двух точек ($\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ — радиусы-векторы начальной и конечной точек луча). Через всякую пару точек $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ можно провести луч, и $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз (или, как говорят, оптическая длина пути) этого луча между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Ниже мы будем везде подразумевать под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиусы-векторы точек на луче соответственно до и после его прохождения через оптическую систему.

Если в $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ один из радиусов-векторов, скажем $\mathbf{r}'$, считать заданным, то ψ как функция от $\mathbf{r}$ будет описывать определённый пучок лучей, а именно пучок лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}'$. Тогда ψ должно удовлетворять уравнению (55,1), в котором дифференцирование производится по компонентам $\mathbf{r}$. Аналогично, считая $\mathbf{r}$ заданным, находим ещё одно уравнение для $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, так что

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi^2) = 1, \quad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2 = 1. \tag{55,2}$$

Направление луча определяется, как мы знаем из предыдущего параграфа, градиентом его фазы. Поскольку $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз в точках $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то направление луча в точке $\mathbf{r}'$ определяется вектором $\mathbf{n}' = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}$, а в точке $\mathbf{r}$ — вектором $\mathbf{n} = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}$. Из (55,2) видно, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ — единичные:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{55,3}$$

Четыре вектора $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ связаны между собой некоторым соотношением, поскольку два из них ($\mathbf{n}, \mathbf{n}'$) являются производными по двум другим ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$) от некоторой функции ψ. Что касается самой функции ψ, то она удовлетворяет дополнительным условиям — уравнениям (55,2).

Для нахождения соотношения между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ удобно ввести вместо ψ другую величину, на которую бы не налагалось никаких дополнительных условий (т. е. которая не должна была бы удовлетворять каким-либо дифференциальным уравнениям). Это можно сделать следующим образом. В функции ψ независимыми переменными являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, так что для дифференциала $d\psi$ имеем

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}\,d\mathbf{r} + \mathbf{n}'d\mathbf{r}'.$$

Произведём теперь преобразование Лежандра к независимым переменным $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т. е. напишем

$$d\psi = -d(\mathbf{n}\mathbf{r}) + \mathbf{r}\,d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}'\,d\mathbf{n}',$$

откуда, вводя функцию

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{n}\mathbf{r} - \psi, \tag{55,4}$$

имеем

$$d\chi = -\mathbf{r}\,d\mathbf{n} + \mathbf{r}'\,d\mathbf{n}'. \tag{55,5}$$

Функцию χ называют угловым эйконалом; как видно из (55,5), независимыми переменными в нём являются $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. На χ не налагается уже никаких дополнительных условий. Действительно, уравнения (55,3) выражают теперь только, что $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1$, а это — условия, относящиеся к независимым переменным. Из этих условий видно, что из трёх компонент n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогично для $\mathbf{n}'$) только две являются независимыми. Мы будем ниже в качестве независимых переменных пользоваться компонентами n_y, n_z, n'_y, n'_z и тогда $n_x = \sqrt{1 - n_g^2 - n_z^2}$, $n'_x = \sqrt{1 - n'^2_y - n'^2_z}$.

Подставляя эти выражения в

$$d\chi = -x\,dn_x - y\,dn_y - z\,dn_z + x'dn'_x + y'\,dn'_y + z'\,dn'_z,$$

находим для дифференциала $d\chi$:

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}x\right)dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}x\right)dn_z + \\ + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}x'\right)dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}x'\right)dn'_z.$$

Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$\begin{gathered} y - \frac{n_y}{n_x}x = -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad z - \frac{n_z}{n_x}x = -\frac{\partial\chi}{\partial n_z}, \\ y' - \frac{n'_y}{n'_x}x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}, \quad z' - \frac{n'_z}{n'_x}x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_z}, \end{gathered} \tag{55,6}$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. Функция χ характеризует конкретные свойства тела, через которые проходят лучи (или свойства поля — в случае движения заряженных частиц).

При заданных значениях $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ каждая из двух пар уравнений (55,6) изображает собой прямую линию. Эти прямые являются не чем иным, как лучами, — до и после прохождения через оптическую систему. Таким образом, уравнения (55,6) непосредственно определяют ход лучей по обе стороны оптической системы.

§ 56. Тонкие пучки лучей

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые гомоцентрические пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестаёт быть гомоцентрическим, т. е. после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какой-нибудь одной точке. Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь пересекаются все в одной точке — изображении светящейся точки[1]).

Можно показать (см. § 57), что единственный случай, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему гомоцентрическими, есть случай тождественного отображения, т. е. случай такой оптической системы, которая для любого предмета даёт тождественное с ним по форме и размерам изображение (другими словами, изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого).

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкого изображения предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения[2]). Возможно только приближённое не вполне резкое осуществление не тождественного изображения протяжённых предметов.

Наиболее важным случаем перехода гомоцентрических пучков в гомоцентрические же являются достаточно тонкие пучки (т. е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи определённой (для данной оптической системы) линии. Эта линия называется оптической осью оптической системы.

---

[1]) Точка пересечения может лежать или на самих лучах, или на линии их продолжения; в зависимости от этого изображения называются соответственно действительными или мнимыми.

[2]) Такое отображение может быть осуществлено с помощью плоских зеркал.

Необходимо при этом отметить, что даже бесконечно узкие пучки лучей (в трёхмерном пространстве) в общем случае не являются гомоцентрическими; мы видели, что и в таком пучке различные лучи пересекаются в различных точках (это явление называется астигматизмом). Исключение представляют те точки волновой поверхности, в которых оба её главных радиуса кривизны равны друг другу, — вблизи такой точки малый участок поверхности можно рассматривать как сферический, и соответствующий тонкий пучок лучей является гомоцентрическим.

Будем рассматривать оптические системы, обладающие аксиальной симметрией. Ось симметрии такой системы является в то же время её оптической осью. Действительно, волновая поверхность пучка лучей, идущего вдоль этой оси, тоже имеет, очевидно, аксиальную симметрию; поверхности же вращения имеют, как известно, в точках своего пересечения с осью симметрии два равных друг другу радиуса кривизны. Поэтому тонкий пучок, идущий в этом направлении, остаётся гомоцентрическим. То же самое относится и к достаточно тонким пучкам, идущим в направлениях, образующих достаточно малые углы с оптической осью[1]).

Для нахождения общих количественных соотношений, определяющих отображения с помощью тонких пучков, проходящих через аксиально-симметрические оптические системы, воспользуемся общими уравнениями (55,6), определив предварительно вид функции χ в рассматриваемом случае.

Поскольку пучки лучей тонкие и идут вблизи оптической оси, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ для каждого пучка направлены почти вдоль этой оси. Если выбрать оптическую ось в качестве оси X, то компоненты n_y, n_z, n'_y, n'_z будут малы по сравнению с единицей. Что касается компонент n_x, n'_x, то $n_x \approx 1$, а n'_x может быть приближённо равным или $+1$ или -1. В первом случае лучи продолжают итти почти в прежнем направлении, попадая в пространство по другую сторону оптической системы, которую в этом случае называют линзой. Во втором случае лучи изменяют направление на почти противоположное; такая оптическая система называется зеркалом.

Воспользовавшись малостью n_y, n_z, n'_y, n'_z, разложим угловой эйконал $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ в ряд и ограничимся первыми членами. В силу аксиальной симметрии всей системы χ должно быть инвариантно по отношению к поворотам системы координат вокруг оптической оси. Отсюда видно, что членов первого порядка, пропорциональных первым степеням y- и z-компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, в раз-

[1]) Можно показать, что задача об отображении с помощью тонких пучков, идущих вблизи оптической оси в не аксиально-симметрической оптической системе, может быть сведена к отображению аксиально-симметрической системой вместе с последующим поворотом получающегося при этом изображения как целого относительно изображаемого предмета.

ложении χ не может быть, — эти члены не обладали бы требуемой инвариантностью. Из членов второго порядка требуемым свойством обладают квадраты $\mathbf{n}^2$, $\mathbf{n}'^2$ и скалярное произведение $\mathbf{nn}'$. Таким образом, с точностью до членов второго порядка угловой эйконал для аксиально-симметрической оптической системы имеет вид

$$\chi = \text{const.} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n_y' + n_z n_z') + \frac{h}{2}(n_y'^2 + n_z'^2), \tag{56,1}$$

где f, g, h — постоянные.

Мы будем рассматривать сейчас для определённости случай линзы, в связи с чем положим $n_x' \approx 1$; для зеркал, как будет ниже указано, все формулы имеют аналогичный вид. Подставляя теперь выражение (56,1) в общие уравнения (55,6), находим:

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn_y' &= y, \quad fn_y + n_y'(x'+h) = y', \\ n_z(x-g) - fn_z' &= z, \quad fn_z + n_z'(x'+h) = z'. \end{aligned} \tag{56,2}$$

Рассмотрим гомоцентрический пчуок, исходящий из точки x, y, z; точка x', y', z' пусть будет той в которой пересекаются все лучи пучка после прохождения через линзу. Если бы первая и вторая пары уравнений (56,2) были независимы, то эти четыре уравнения при заданных x, y, z, x', y', z' определили бы одну определённую систему значений n_y, n_z, n_y', n_z', т. е. всего только один из лучей, выходящих из точки x, y, z, прошёл бы через точку x', y', z'. Для того чтобы все лучи, выходящие из x, y, z, прошли через x', y', z', необходимо, следовательно, чтобы уравнения (56,2) не были независимы, т. е. чтобы одна пара этих уравнений была следствием другой. Необходимым для такой зависимости условием является, очевидно, пропорциональность коэффициентов одной пары уравнений коэффициентам другой пары (тогда одна пара получается из другой просто почленным умножением на постоянную). Таким образом, должно быть

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}; \tag{56,3}$$

в частности,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \tag{56,4}$$

Полученные уравнения определяют искомую зависимость координат точки изображения от координат предмета при отображении с помощью тонких пучков.

Точки $x = g$, $x = -h$ на оптической оси называются главными фокусами оптической системы. Рассмотрим пучки лучей, параллельных оптической оси. Точка испускания такого луча находится, очевидно, в бесконечности на оптической оси, т. е. $x = \infty$. Из (56,3) видно, что в этом случае $x' = -h$. Таким образом, параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему пересекается в главном фокусе. Наоборот, пучок лучей, исходящий из главного фокуса, становится после прохождения через систему параллельным.

В уравнении (56,3) координаты x и x' отсчитываются от одного и того же начала координат, лежащего на оптической оси. Удобнее, однако, отсчитывать координаты предмета и изображения от разных начал координат, выбрав их соответственно в главных фокусах. В качестве положительного направления отсчёта координат выберем направления от соответствующего фокуса в сторону, направленную по ходу луча. Обозначая новые координаты предмета и изображения большими буквами, имеем

$$X = x - g,\quad X' = x' + h,\quad Y = y,\quad Y' = y',\quad Z = z,\quad Z' = z'.$$

Уравнения отображения (56,3) и (56,4) принимают в новых обозначениях вид

$$XX' = -f^2, \tag{56,5}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}. \tag{56,6}$$

Величину f называют главным фокусным расстоянием системы.

Отношение Y'/Y называется боковым увеличением. Что касается продольного увеличения, то, поскольку координаты не просто пропорциональны друг другу, его следует писать в дифференциальном виде, сравнивая элемент длины предмета (в направлении оси) с элементом длины изображения. Из (56,5) пишем для «продольного увеличения»

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y}\right)^2. \tag{56,7}$$

Мы видим отсюда, что даже для бесконечно малых предметов нельзя получить геометрически подобного изображения. Продольное увеличение никогда не равно поперечному (за исключением травиального случая тождественного отображения).

Пучок, вышедший из точки $X=f$ на оптической оси, пересекается вновь в точке $X' = -f$ на той же оси; эти две точки называются главными. Из уравнений (56,2) $(n_y X - f n'_y = Y,\ \ n_z Y - f n'_z = Z)$ видно, что в этом случае $(X = f,\ Y = Z = 0)$ имеют место равенства $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. Таким образом, всякий луч, выходящий из главной точки, пересекает вновь оптическую ось в другой главной точке в направлении, параллельном первоначальному.

Если координаты предмета и его изображения отсчитывать от главных точек (а не от главных фокусов), то для этих координат ξ и ξ' мы имеем

$$\xi' = X' + f,\quad \xi = X - f.$$

Подставляя это в (56,5), легко получаем уравнение отображения в виде

$$\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi'}=-\frac{1}{f}. \qquad (56,8)$$

Можно показать, что у оптических систем с малой толщиной (например, у зеркала, узкой линзы) обе главные точки почти совпадают. В этом случае в особенности удобно уравнение (56,8), так как в нём ξ и ξ' отсчитываются тогда практически от одной и той же точки.

Если фокусное расстояние положительно, то предметы, находящиеся спереди (по ходу луча) от фокуса ($X>0$), отображаются прямо ($Y'/Y>0$); такие оптические системы называются собирательными. Если же $f<0$, то при $X>0$ имеем $Y'/Y<0$, т. е. предмет отображается обратным образом; такие системы называются рассеивающими.

Существует один предельный случай отображения, который не содержится в формулах (56,8), — это случай, когда все три коэффициента f, g, h (56,1) делаются бесконечными (т. е. оптическая система имеет бесконечное фокусное расстояние и её главные фокусы находятся в бесконечности). Раскрывая в уравнении (56,4) скобки, деля почленно на g и переходя к пределу бесконечных f, g, h, находим

$$x'=\frac{h}{g}x+\frac{f^2-gh}{g}.$$

Поскольку представляет интерес только тот случай, когда предмет и его изображение находятся на конечных расстояниях от оптической системы, то f, g, h должны стремиться к бесконечности так, чтобы отношения $\frac{h}{g}$, $\frac{f^2-gh}{g}$ были конечными. Обозначая их, соответственно, посредством α и β, имеем

$$x'=\alpha x+\beta.$$

Для двух других координат мы имеем теперь из общего уравнения (56,7) $\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=\sqrt{\alpha}$. Наконец, отсчитывая опять координаты x и x' от разных начал координат, именно, соответственно от произвольной точки на отражаемой оси и от изображения этой точки, получаем окончательно уравнения отображения в простом виде

$$X'=\alpha X, \quad Y'=\pm\sqrt{\alpha}\,Y, \quad Z'=\pm\sqrt{\alpha}\,Z. \qquad (56,9)$$

Таким образом, продольные и поперечные увеличения постоянны (всё же изображение не геометрически подобно предмету, поскольку эти два увеличения не равны друг другу). Рассмотренный случай отображения называется телескопическим.

Все выведенные нами для линз формулы (56,5)—(56,9) в равной мере применимы и к зеркалам, и даже к оптическим системам без аксиальной симметрии, если только отображение осуществляется тонкими пучками лучей, идущими вблизи оптической оси. При этом всегда отсчёт x-координат предмета и изображения должен производиться вдоль оптической оси от соответствующих точек (главных фокусов или главных точек) по направлению распространения луча. Надо иметь в виду при этом, что у оптических систем, не обладающих аксиальной симметрией, направления оптической оси спереди и позади системы не лежат на одной прямой.

Задача

Определить фокусное расстояние для отображения с помощью двух аксиально-симметрических оптических систем с совпадающими оптическими осями.

Решение. Пусть f_1 и f_2 — фокусные расстояния обеих систем. Для каждой системы в отдельности имеем

$$X_1X_1' = -f_1^2, \quad X_2X_2' = -f_2'^2.$$

Поскольку изображения, даваемые первой системой, являются предметом для второй, то, обозначая посредством l расстояние между задним главным фокусом первой системы и передним фокусом второй, имеем $X_2 = X_1' - l$; выражая X_2' через X_1, находим

$$X_2' = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + lX_1},$$

или

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2' - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

откуда видно, что главные фокусы составной системы находятся в точках $X_1 = -\frac{f_1^2}{l}$, $X_2' = \frac{f_2^2}{l}$, а фокусное расстояние равно

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(для выбора знака в этом выражении надо написать соответствующее уравнение для поперечного увеличения).

В случае, если $l = 0$, фокусное расстояние $f = \infty$, т. е. составная система даёт телескопическое отображение. В этом случае имеем $X_2' = X_1\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$, т. е. параметр α в общей формуле (56,9) равен: $\alpha = \frac{f_2^2}{f_1^2}$.

§ 57. Отображение широкими пучками лучей

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с помощью тонких пучков лучей является приближённым; оно тем точнее (т. е. резче), чем у́же эти пучки. Перейдём теперь к вопросу о том, насколько возможно осуществление точного отображения предметов пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, которое можно осуществить с любой оптической системой, обладающей аксиальной симметрией, отображение широкими пучками возможно только с помощью определённым образом построенных оптических систем. Даже с этим ограничением, возможно, как уже указывалось в § 56, отображение далеко не всех точек пространства.

Дальнейшие выводы основаны на следующем существенном замечании. Пусть все лучи, выходящие из некоторой точки O и проходящие через оптическую систему, вновь пересекаются в некоторой другой точке O'. Легко видеть, что оптическая длина пути ψ одинакова для всех этих лучей. Действительно, вблизи каждой из точек O, O' волновые поверхности для пересекающихся в них лучей являются сферами с центрами соответственно в O и O' и в пределе, при приближении к O и O', вырождаются в эти точки. Но волновые поверхности являются поверхностями постоянной фазы, и поэтому изменения фазы вдоль разных лучей между точками их пересечения двух определённых волновых поверхностей одинаковы. Из сказанного следует, что одинаковы (для разных лучей) и полные изменения фазы между точками O и O'.

Начнём с рассмотрения условий, выполнение которых необходимо для осуществления отображения широкими пучками малого отрезка прямой; изображение представляет собой при этом тоже малый отрезок прямой. Выберем направления этих отрезков за направления осей x и x' с началами O и O' в каких-либо соответствующих друг другу точках предмета и изображения. Пусть ψ есть оптическая длина пути для лучей, выходящих из O и приходящих в O'. Для лучей, выходящих из бесконечно близкой к O точки с координатой dx и сходящихся в точке изображения с координатой dx', оптическая длина пути есть $\psi + d\psi$, где

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial x'}\,dx'.$$

Введём «увеличение» при отображении

$$\alpha = \frac{dx'}{dx}$$

как отношение длины dx' элемента изображения к длине отображаемого элемента dx. В силу малости отображаемого отрезка прямой увеличение α можно считать величиной, постоянной вдоль его длины. Написав также, как обычно, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -n_x$, $\frac{\partial\psi}{\partial x'} = n'_x$ ($n_x n'_x$ — косинусы углов между направлениями луча и соответственно осями x и x'), получим

$$d\psi = (\alpha n'_x - n_x)\,dx.$$

Как и для всякой пары соответствующих друг другу точек предмета и изображения, оптическая длина пути $\psi + d\psi$ должна быть одинаковой для всех лучей, выходящих из точки dx и приходящих в точку dx'. Отсюда получаем условие:

$$\alpha n'_x - n_x = \text{const}. \tag{57,1}$$

Это и есть искомое условие, которому должен удовлетворять ход лучей в оптической системе при отображении широкими пучками малого отрезка прямой. Соотношение (57,1) должно выполняться для всех лучей, выходящих из точки O.

Применим, например, условие (57,1) к отображению с помощью аксиально-симметрической оптической системы отрезка прямой, совпадающей с оптической осью системы; изображение будет, очевидно, тоже совпадать с осью. Луч, идущий вдоль оптической оси ($n_x = 1$), в силу аксиальной симметрии системы не меняет своего направления при прохождении через неё, т. е. и $n'_x = 1$. Отсюда следует, что const. в (57,1) равна в рассматриваемом случае $\alpha - 1$, и мы можем переписать (57,1) в виде:

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha.$$

Обозначая посредством θ и θ' углы, образуемые лучами с оптической осью в точках предмета и изображения, имеем:

$$1 - n_x = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 1 - \cos\theta' = 2\sin^2\frac{\theta'}{2}.$$

Таким образом, получим условие отображения в виде:

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta'}{2}} = \text{const.} = \sqrt{\alpha}. \tag{57,2}$$

Перейдём теперь к отображению малого участка плоскости; изображение будет малым участком другой плоскости. Легко показать, что если для каких-либо двух отрезков прямых, лежащих в плоскости предмета, выполняются условия вида (57,1), то они выполняются и для всякого другого отрезка в этой плоскости, и потому будет осуществляться отображение всего рассматриваемого участка плоскости. Всегда можно выбрать оси X и Y в плоскости предмета таким образом, что отображённые оси X', Y' будут тоже взаимно перпендикулярными. Условия, налагаемые на ход лучей в оптической системе при отображении широкими пучками малого участка плоскости, можно, таким образом, написать в виде:

$$\alpha n'_x - n_x = \text{const.}, \quad \beta n'_y - n_y = \text{const.}, \tag{57,3}$$

где α, β — постоянные, определяющие увеличение в направлениях X и Y.

В качестве примера рассмотрим отображение участка плоскости, перпендикулярной к оптической оси аксиально-симметрической оптической системы; изображение будет, очевидно, тоже перпендикулярно к этой оси. В силу симметрии $\alpha=\beta$ и оба условия (57,3) сводятся здесь к одному. Вводя опять углы θ, θ' между лучом и оптической осью в точках предмета и изображения, получим

$$\alpha \sin\theta' - \sin\theta = \text{const}.$$

Для лучей, вышедших из точки пересечения изображаемой плоскости с оптической осью в направлении этой оси ($\theta=0$), должно быть, в силу симметрии, и $\theta'=0$. Поэтому $\text{const.}=0$, и мы получаем условие отображения в виде:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \text{const.} \equiv \alpha. \tag{57,4}$$

Что касается отображения широкими пучками трёхмерных предметов, то легко видеть, что оно невозможно даже при малом объёме тела. Действительно, условиями такого отображения являлось бы выполнение соотношений вида (57,1) для каких-либо трёх отрезков прямых, проходящих в отображаемом участке пространства. Эти соотношения должны выполняться для всех лучей, выходящих из точки O предмета, т. е. при произвольном $\mathbf{n}$. Таким образом, три компоненты n'_x, n'_y, n'_z единичного вектора $\mathbf{n}'$ должны были бы удовлетворять трём уравнениям вида (57,1) и, кроме того, соотношению $n'^2_x + n'^2_y + n'^2_z = 1$, всего четырём уравнениям, что, вообще говоря, невозможно (за исключением тривиального случая тождественного отображения).

§ 58. Пределы геометрической оптики

Непосредственно из определения плоской монохроматической волны видно, что в такой волне амплитуда везде и всегда одинакова. Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$. Всякая же волна с не везде и не всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической. Мы займёмся теперь выяснением вопроса о «степени монохроматичности» волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся функцией от времени. Другими словами, в каждой точке пространства, через которое проходит волна, амплитуда волны меняется со временем.

Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны. Тогда поле волны, например, электрическое, в данной точке имеет вид $E_0(t)e^{i\omega_0 t}$. Это поле, не являющееся, конечно, само монохроматическим, можно, однако, разложить по монохроматическим волнам, т. е. в интеграл Фурье. Амплитуда компоненты этого разложения с частотой ω пропорциональна интегралу вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt$. Множитель $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю. Если бы $\mathbf{E}_0$ было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех $\omega \neq \omega_0$. Если же $\mathbf{E}_0(t)$ переменно, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка $\frac{1}{\omega-\omega_0}$, то интеграл почти равен нулю, тем точнее, чем медленнее меняется $\mathbf{E}_0$. Для того чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы $\mathbf{E}_0(t)$ заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка периода $\frac{1}{\omega-\omega_0}$.

Обозначим посредством Δt порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется. Из приведённых соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от ω_0 частоты, входящие в спектральное разложение этой волны с заметными интенсивностями, определяются из условия $\frac{1}{\omega-\omega_0} \sim \Delta t$. Если обозначить посредством $\Delta\omega$ интервал частот (вокруг средней частоты ω_0), входящих в спектральное разложение волны, то, следовательно, имеет место соотношение

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1. \tag{58,1}$$

Чем меньше $\Delta\omega$, тем меньший интервал частот входит в спектральное разложение данной волны, т. е. тем более монохроматична эта волна. Мы видим, следовательно, что действительно волна тем более монохроматична, чем больше Δt, т. е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства её амплитуда.

Соотношения, аналогичные (58,1), легко вывести и для волнового вектора. Пусть Δx, Δy, Δz суть порядки величин расстояний вдоль осей X, Y, Z, на которых заметно меняется амплитуда волны. В данный момент времени поле волны как функция от координаты x (при заданных y и z) имеет вид $\mathbf{E}_0(x)e^{ik_{0x}x}$, где k_{0x} — некоторая средняя компонента волнового вектора. Совершенно аналогично выводу (58,1) можно найти интервал Δk_x значений, имеющихся в разложении рассматриваемой волны в интеграл Фурье (то же самое для k_y и k_z). При этом мы находим

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \sim 1. \tag{58,2}$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени. Обозначим посредством Δt порядок величины этого интервала. Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменяется за время Δt, в течение которого волна успеет целиком пройти через эту точку. На основании соотношения (58,1) мы можем теперь сказать, что «степень немонохроматичности» такой волны $\Delta\omega$ во всяком случае не может быть меньше, чем $1/\Delta t$ (но может, конечно, быть и больше):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \tag{58,3}$$

Аналогично, если Δx, Δy, Δz суть порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового вектора, входящих в разложение волны, находим

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \tag{58,4}$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось X по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{58,5}$$

где θ_y — порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости XY (ср. также § 61).

С другой стороны, формула (58,5) даёт ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений. Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна. Для ширины Δ этого пятна имеем согласно (58,5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \tag{58,6}$$

где θ — угол раствора пучка. Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету. Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера λ/θ. Соответственно этому формула (58,6) определяет предельную разрешающую силу микроскопа. Минимальное значение Δ, достигающееся при $\theta \sim 1$, есть λ в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

Задача

Найти порядок величины наименьшей ширины светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

Решение. Обозначив размер отверстия диафрагмы через d, имеем из (58,5) для угла диффракции λ/d, откуда ширина пучка порядка $d + \frac{\lambda}{d} l$. Наименьшее значение этой величины есть $\sqrt{\lambda l}$.

§ 59. Диффракция

Законы геометрической оптики строго точны лишь в идеальном случае, когда длину волны можно рассматривать как бесконечно малую. Чем хуже выполнено это условие, тем сильнее проявляются отклонения от геометрической оптики. Явления, наблюдающиеся в результате этих отклонений, носят название явлений диффракции.

Явления диффракции можно наблюдать, например, если на пути распространения света[1]) находятся препятствия — непрозрачные тела (будем называть их экранами) произвольной формы или, например, если свет проходит через отверстия в непрозрачных экранах. Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экранами находились бы области «тени», резко отграниченные от областей, куда свет попадает. Диффракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света. Эти явления диффракции тем сильнее выражены, чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны.

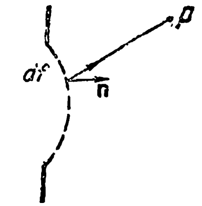

Рис. 5.

Задача теории диффракции заключается в том, чтобы при данном расположении и форме тел (и расположении источников света) определить распределение света, т. е. электромагнитное поле во всём пространстве. Точное разрешение этой задачи возможно только путём решения волнового уравнения с соответствующими граничными условиями на поверхности тел, зависящими ещё к тому же и от оптических свойств материала. Такое решение обычно представляет большие математические трудности.

Однако в большинстве случаев оказывается достаточным приближённый метод решения задачи о распределении света вблизи границы между светом и тенью. Этот метод применим в случаях слабого отклонения от геометрической оптики, т. е. тогда, когда, во-первых, размеры всех тел всё же велики по сравнению с длиной волны, и, во-вторых, рассматриваются лишь небольшие отклонения света от направления лучей, определяемых геометрической оптикой.

Рассмотрим какой-нибудь экран с отверстием, через которое проходит свет от данных источников. Рис. 5 изображает этот экран в разрезе (жирная линия); свет идёт слева направо. Будем обозначать посредством u любую из компонент поля $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. При этом под u мы будем подразумевать поле как функцию только от координат, т. е. без множителя $e^{-i\omega t}$, определяющего зависимость от времени. Нашей задачей является определение интенсивности света, т. е. поля u в любой точке наблюдения P за экраном. При приближённом

[1]) Мы будем ниже, говоря о диффракции, говорить для определённости о свете; всё нижеследующее относится, конечно, к любым электромагнитным волнам.

решении этой задачи в случаях, когда отклонения от геометрической оптики малы, можно считать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана. Другими словами, значения поля здесь те, которые следуют непосредственно из геометрической оптики. Во всех же точках, находящихся непосредственно за экраном, поле можно положить равным нулю. При этом, очевидно, свойства самого экрана (материала, из которого он сделан) вообще не играют роли. Очевидно также, что в рассматриваемых случаях для диффракции существенна только форма края отверстия и не существенна форма непрозрачного экрана.

Проведём какую-нибудь поверхность, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями (разрез такой поверхности на рис. 5 изображён пунктиром). Эту поверхность разобьём на участки с площадью df, размеры которых, однако, велики по сравнению с длиной волны света. Мы можем тогда рассматривать каждый из этих участков, до которых дошла световая волна, так, как будто бы он сам делается источником световой волны, распространяющейся во все стороны от этого участка. Поле в точке P мы будем рассматривать как результат наложения полей, исходящих из всех участков df поверхности, закрывающей отверстие (так называемый принцип Гюйгенса).

Поле, создаваемое участком df в точке P, пропорционально, очевидно, значению u поля в самом участке df (напоминаем, что поле в df мы предполагаем таким, каким оно было бы при отсутствии экрана). Кроме того, оно пропорционально проекции df_n площади df на плоскость, перпендикулярную к направлению n луча, пришедшего из источника света в df. Это следует из того, что какой бы формой ни обладал элемент df, через него будут проходить одинаковые лучи, если только его проекция df_n будет неизменной, а потому и его действие на поле в точке P будет одинаковым.

Таким образом, поле, создаваемое в точке P участком df, пропорционально udf_n. Далее, надо ещё учесть изменение амплитуды и фазы волны при её распространении от df к точке P. Закон этого изменения определяется формулой (54,3). Поэтому udf_n надо умножить ещё на $\frac{1}{R}e^{ikR}$ (где R — расстояние от df до P, а k — абсолютная величина волнового вектора света), и мы находим, что искомое поле пропорционально $udf_n\frac{e^{ikR}}{R}$, т. е. равно

$$au\frac{e^{ikR}}{R}df_n,$$

где a есть неизвестная пока постоянная. Поле в точке P, являющееся результатом наложения полей, создаваемых всеми df, равно, следовательно:

$$u_P = a\int\frac{ue^{ikR}}{R}df_n, \tag{59,1}$$

где интеграл распространён по поверхности, ограниченной краем отверстия. Этот интеграл в рассматриваемом приближении не может, конечно, зависеть от формы этой поверхности. Формула (59,1) применима, очевидно, и к диффракции не от отверстия в экране, а от экрана, вокруг которого свет может свободно распространяться. В этом случае поверхность интегрирования в (59,1) простирается во все стороны от края экрана.

Для определения постоянной a рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси X; волновые поверхности параллельны плоскости YZ. Пусть u есть значение поля в плоскости YZ. Тогда в точке P, которую мы выберем на оси X, поле равно $u_P = ue^{ikx}$. С другой стороны, поле в точке P можно определить исходя из формулы (59,1), выбрав в качестве поверхности интегрирования, например, плоскость YZ. При этом ввиду малости угла диффракции, т. е. малости отклонения от геометрической оптики, в интеграле существенны только точки плоскости YZ, близкие к началу координат, т. е. точки, в которых y, $z \ll x$ (x — координата точки P). Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (59,1) даст

$$u_P = \frac{a}{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int u e^{ik\left(x + \frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x}\right)} \, dy\,dz.$$

Здесь u есть постоянная (поле в плоскости YZ); в множителе $1/R$ можно положить $R \cong x = \mathrm{const}$. Таким образом,

$$u_P = au\,\frac{e^{ikx}}{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz.$$

Оба эти интеграла, конечно, одинаковы; каждый из них подстановкой $y = \xi\sqrt{\frac{2x}{k}}$ приводится к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\xi^2\, d\xi + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\xi^2\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1 + i),$$

и мы получаем

$$u_P = aue^{ikx}\,\frac{2i\pi}{k}.$$

С другой стороны, $u_P = ue^{ikx}$ и, следовательно,

$$a = \frac{k}{2\pi i}.$$

Подставляя это в (59,1), находим окончательно решение поставленной задачи в виде

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR}\, df_n. \tag{59,2}$$

Применим формулу (59,2) для решения вопроса об изменении фазы при прохождении луча через точку его касания с каустикой (см. конец § 54). Выберем в качестве поверхности интегрирования в (59,2) какую-либо волновую поверхность, и будем определять поле u_P в точке P, лежащей на некотором данном луче на расстоянии x от точки его пересечения с выбранной волновой поверхностью (эту точку выберем в качестве начала координат O, а в качестве плоскости YZ — плоскость, касательную к волновой поверхности в точке O). При интегрировании в (59,2) существенен только небольшой участок волновой поверхности вблизи точки O. Если плоскости XY и XZ выбраны совпадающими с главными плоскостями кривизны волновой поверхности в точке O, то вблизи этой точки уравнение поверхности есть

$$X = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2},$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны. Расстояние же R от точки волновой поверхности с координатами X, y, z до точки P с координатами x, 0, 0 есть

$$R = \sqrt{(x-X)^2 + y^2 + z^2} \cong x + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Вдоль волновой поверхности поле u можно считать постоянным; то же касается множителя $1/R$. Поскольку мы интересуемся только изменением фазы волны, то коэффициент опускаем и пишем просто

$$u_P \sim \frac{1}{i}\int e^{ikR}\, df_n \cong$$
$$\cong \frac{e^{ikx}}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right)} dy \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)} dz. \tag{59,3}$$

Центры кривизны волновой поверхности лежат на рассматриваемом луче в точках $x = R_1$ и $x = R_2$; это и есть точки касания лучом обеих каустик. Пусть $R_2 < R_1$. При $x < R_2 < R_1$ коэффициенты при i в показателях подинтегральных выражений в обоих интегралах (по dy и dz) положительны, и каждый из этих интегралов пропорционален $(1+i)$. Поэтому на участке луча до касания первой каустики имеет $u_P \sim e^{ikx}$. При $R_2 < x < R_1$, т. е. на отрезке луча между двумя точками касания, интеграл по dy пропорционален $1+i$, а интеграл по dz пропорционален $1-i$, так что их произведение вовсе не содержит i. Таким образом имеем здесь $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx-\pi/2)}$, т. е. при прохождении луча вблизи первой каустики фаза дополнительно меняется на $-\pi/2$. Наконец, при $x > R_1 > R_2$ имеем $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx-\pi)}$, т. е. при прохождении вблизи второй каустики фаза ещё раз меняется на $-\pi/2$.

Задача

Определить распределение интенсивности света вблизи точки касания луча с каустикой.

Решение. Для решения задачи пользуемся формулой (59,2), производя в ней интегрирование по какой-либо волновой поверхности, достаточно удалённой от рассматриваемой точки касания луча каустикой. На рис. 6 ab есть сечение этой волновой поверхности, а $a'b'$ — сечение каустики; $a'b'$ есть эволюта кривой ab. Мы интересуемся распределением интенсивности вблизи точки O касания луча QO с каустикой; длина D отрезка QO луча предполагается достаточно большой. Посредством x обозначим расстояние от точки O вдоль нормали к каустике, причём будем считать положительными значения x для точек, лежащих на нормали по направлению к центру кривизны.

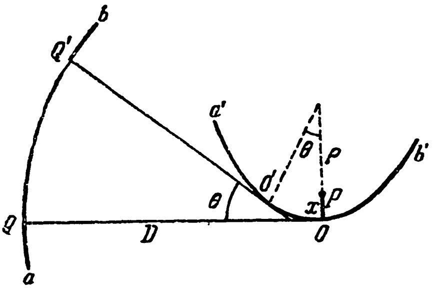

Рис. 6.

Подинтегральное выражение в (59,2) есть функция от расстояния R от произвольной точки Q' на волновой поверхности до точки P. По известному свойству эволюты сумма длины отрезка $Q'O'$ касательной в точке O' и длины дуги OO' равна длине QO касательной в точке O. Для близких друг к другу точек O и O' имеем $OO' = \theta\rho$ (ρ — радиус кривизны каустики в точке O). Поэтому длина $Q'O' = D - \theta\rho$. Расстояние же $Q'O$ (по прямой) равно приближённо (угол θ предполагается малым) [1]:

$$Q'O \cong Q'O' + \rho \sin\theta = D - \theta\rho + \rho\sin\theta \cong D - \frac{\rho\theta^3}{6}.$$

Наконец, расстояние $R = Q'P$ равно [1]) $R = Q'O - x\sin\theta \cong Q'O - x\theta$, т. е.

$$R \cong D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3.$$

---

[1]) Мы пользуемся здесь приближённой формулой для абсолютной величины суммы двух векторов, из которых один по абсолютной величине вёлик по сравнению со вторым:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{a}| \cong A + a_A$$

($A \gg a$; a_A — проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{A}$).

Подставляя это выражение в (59,2), найдём

$$u_P \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\rho}{6}\theta^3}\, d\theta = 2\int\limits_0^{\infty} \cos\left(kx\theta + \frac{k\rho}{6}\theta^3\right) d\theta$$

(медленно меняющийся множитель $1/R$ в подинтегральном выражении не существенен по сравнению с экспоненциальным множителем, и мы считаем его постоянным). Вводя новую переменную интегрирования $\xi = \left(\frac{k\rho}{2}\right)^{1/3}\theta$, получим

$$u_P \sim \Phi\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

где $\Phi(t)$ есть так называемая функция Эйри[1]). Для интенсивности $I \sim |u_P|^2$ напишем:

$$I = 2A\left(\frac{2k^2}{\rho}\right)^{1/6}\Phi^2\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right)$$

(о выборе постоянного множителя — см. ниже).

При больших положительных значениях x имеем отсюда асимптотическую формулу

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}}\exp\left\{-\frac{4x^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}\right\},$$

т. е. интенсивность экспоненциально убывает (область «тени»). При боль-

---

[1]) Следуя В. А. Фоку («Таблицы функций Эйри», Москва, 1946), определяем функцию Эйри $\Phi(t)$ посредством:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi.$$

При больших положительных значениях аргумента для функции $\Phi(t)$ имеет место асимптотическое выражение

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}}\, e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},$$

т. е. $\Phi(t)$ экспоненциально стремится к нулю. При больших по абсолютной величине отрицательных значениях t имеет место формула:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

т. е. $\Phi(t)$ осциллирует с амплитудой, убывающей обратно пропорционально $(-t)^{1/4}$.

Сводку формул, описывающих функцию Эйри, и таблицы её численных значений можно найти в упомянутой книжке В. А. Фока [функция $\Phi(t)$ обозначается им как $v(t)$].

ших же по абсолютной величине отрицательных значениях x имеем:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}} \sin^2 \left\{ \frac{2(-x)^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} + \frac{\pi}{4} \right\},$$

т. е. интенсивность быстро осциллирует; усреднённое по этим осцилляциям её значение равно:

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

Отсюда выясняется смысл постоянной A — она определяет интенсивность вдали от каустики, которая получилась бы из геометрической оптики без учёта явлений диффракции.

В самой точке касания луча с каустикой ($x = 0$) имеем:

$$I = 0{,}89\, Ak^{-1/3} \rho^{-1/6}$$

(так как $\Phi(0) = 0{,}629\ldots$). Таким образом, в точках каустики интенсивность пропорциональна $k^{1/3}$, т. е. $\lambda^{-1/3}$ (λ — длина волны). При $\lambda \to 0$ интенсивность, как и должно было быть (ср. § 54), стремится к бесконечности.

§ 60. Диффракция Френеля

Если источник света и точка P, в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке P играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (59,2), — участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой P. Действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой. Диффракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название диффракционных явлений Френеля.

Рассмотрим диффракцию Френеля от какого-нибудь экрана. Благодаря указанному свойству такой диффракции играет роль только небольшой участок края экрана. Но на достаточно малых участках край экрана можно всегда считать прямолинейным. Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве плоскости XY плоскость, проходящую через источник света Q (рис. 7) и через линию края экрана. Перпендикулярную к ней плоскость XZ выбираем так, чтобы она прошла через точку Q и точку наблюдения P, в которой мы ищем значение интенсивности света. Наконец, начало координат O выбираем на линии края экрана, после чего положение всех трёх осей вполне определено.

Расстояние от источника света Q до начала координат пусть будет D_q. x-координату точки наблюдения P обозначим как D_p, а её z-координату, т. е. расстояние до плоскости XY, — посредством d. Согласно геометрической оптике свет мог бы попасть только в точки, лежащие над плоскостью XZ; область же под плоскостью XZ есть область, где согласно геометрической оптике была бы тень (область геометрической тени).

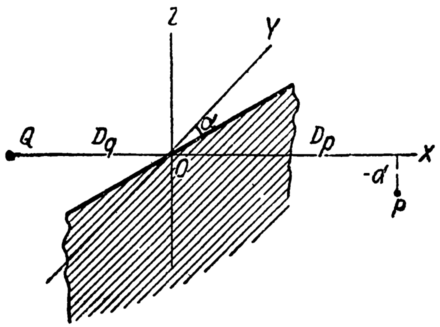

Рис. 7.

Мы определим теперь распределение интенсивности света за экраном вблизи границы геометрической тени, т. е. при малых (по сравнению с D_p и D_q) значениях d. Отрицательное d означает, что точка P находится в области геометрической тени.

В качестве поверхности интегрирования в (59,2) выберем полуплоскость, проходящую через линию края экрана перпендикулярно к плоскости XY. Координаты x и y точек этой поверхности связаны друг с другом соотношением $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол между линией края экрана и осью Y), а координата z положительна. Поле волны, исходящей из источника Q, на расстоянии R_q от него пропорционально множителю e^{ikR_q}. Поэтому поле u на поверхности интегрирования пропорционально

$$u \sim \exp\left\{ik\sqrt{y^2+z^2+(D_q+y\operatorname{tg}\alpha)^2}\right\}.$$

В интеграле (59,2) для R надо теперь подставить

$$R=\sqrt{y^2+(z-d)^2+(D_p-y\operatorname{tg}\alpha)^2}.$$

В подинтегральном выражении медленно изменяющиеся множители не существенны по сравнению с экспоненциальным. Поэтому мы можем считать $1/R$ постоянным, а вместо df_n писать $dy\,dz$. Мы находим тогда, что поле в точке P:

$$u_P \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left\{ik\left(\sqrt{(D_q+y\operatorname{tg}\alpha)^2+y^2+z^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{(D_p-y\operatorname{tg}\alpha)^2+(y-d)^2+z^2}\right)\right\}dy\,dz. \qquad (60,1)$$

Как мы уже говорили, в точку P попадает свет главным образом из точек плоскости интегрирования, близких к O. Поэтому в интеграле (60,1) играют роль малые y и z (по сравнению с D_q и D_p). Мы можем на этом основании написать:

$$\sqrt{(D_q+y\operatorname{tg}\alpha)^2+y^2+z^2}\cong D_q+\frac{y^2+z^2}{2D_q}+y\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sqrt{(D_p-y\operatorname{tg}\alpha)^2+(y-d)^2+z^2}\cong D_p+\frac{(y-d)^2+z^2}{2D_p}-y\operatorname{tg}\alpha.$$

Подставим это в (60,1). Поскольку нас интересует поле только как функция от расстояния d, то постоянный множитель $\exp\{ik(D_p+D_q)\}$ мы опускаем; интеграл по dz тоже даёт выражение, не содержащее d, которое мы также опустим. Мы находим тогда

$$u_P\sim\int_0^\infty \exp\left\{ik\left(\frac{1}{2D_q}y^2+\frac{1}{2D_p}(y-d)^2\right)\right\}dy.$$

Это выражение можно написать и в таком виде:

$$u_P\sim\exp\left\{-ik\frac{d^2}{2(D_p+D_q)}\right\}\int_0^\infty \exp\left\{ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right\}dy.$$

Интенсивность света определяется квадратом поля, т. е. квадратом модуля $|u_P|^2$. Поэтому для нахождения интенсивности стоящий перед интегралом множитель несуществен, так как при умножении на сопряжённое выражение он даёт единицу. В интеграле сделаем подстановку:

$$\frac{k}{2}\frac{\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}=\eta^2.$$

Тогда мы получаем:

$$u_P\sim\int_{-w}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta, \tag{60,2}$$

где

$$w=d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q+D_p)}}. \tag{60,3}$$

Таким образом, интенсивность I в точке P равна:

$$I=\frac{I_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-w}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta\right|^2=\frac{I_0}{2}\left\{\left(C(w)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(w)+\frac{1}{2}\right)^2\right\}, \tag{60,4}$$

где

$$C(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w\cos\eta^2d\eta,\qquad S(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w\sin\eta^2d\eta$$

— так называемые интегралы Френеля. Формула (60,4) решает поставленную задачу, определяя интенсивность света как функцию от d. I_0 есть, как легко видеть, интенсивность в освещённой области в точках, не слишком близких к краю тени, точнее при $w \gg 1$ ($C(\infty) = S(\infty) = {}^1/_2$).

Области геометрической тени соответствуют отрицательные w. Легко выяснить асимптотический вид функции $I(w)$ при больших по абсолютной величине отрицательных значениях w. Для этого поступим следующим образом. Интегрируя по частям, имеем:

$$\int\limits_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = -\frac{1}{2i\,|w|} e^{iw^2} + \frac{1}{2i} \int\limits_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Интегрируя в правой части равенства ещё раз по частям и продолжая этот процесс, получим ряд по степеням $1/|w|$:

$$\int\limits_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = e^{iw^2} \left[-\frac{1}{2i\,|w|} + \frac{1}{4\,|w|^3} - \ldots \right].$$

Хотя бесконечный ряд такого вида и не является сходящимся, но ввиду того, что при больших $|w|$ величина его последовательных членов быстро падает, уже первый его член даёт хорошее представление стоящей слева функции при достаточно больших $|w|$ (ряды такого рода называются асимптотическими). Таким образом, для интенсивности $I(w)$ (60,4) получим следующую асимптотическую формулу, пригодную для больших отрицательных значений w:

$$I = \frac{I_0}{4\pi w^2}. \tag{60,5}$$

Мы видим, что в области геометрической тени, вдали от её края, интенсивность стремится к нулю обратно пропорционально квадрату расстояния от края тени.

Рассмотрим теперь положительные значения w, т. е. область выше плоскости XY. Пишем

$$\int\limits_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2} d\eta - \int\limits_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2} d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_{w}^{\infty} e^{-i\eta^2} d\eta.$$

При достаточно больших w можно воспользоваться асимптотическим представлением стоящего в правой части равенства интеграла, и мы будем иметь:

$$\int\limits_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \cong (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw} e^{iw^2}.$$

Подставляя это выражение в (60,4), получим:

$$I = I_0\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\left(w^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{w}\right). \qquad (60,6)$$

Таким образом, в освещённой области, вдали от края тени, интенсивность имеет неограниченный ряд максимумов и минимумов, так что отношение I/I_0 колеблется в обе стороны от единицы. Размах этих колебаний уменьшается с ростом w обратно пропорционально расстоянию от края геометрической тени, а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом.

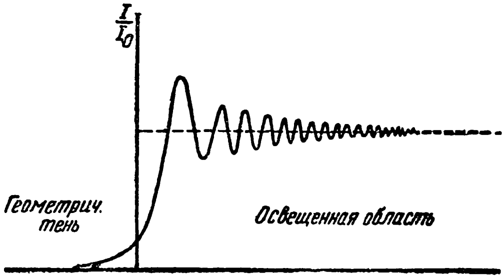

Рис. 8.

При небольших w функция $I(w)$ имеет качественно тот же характер. На рис. 8 изображён её график. В области геометрической тени интенсивность спадает монотонно при удалении от границы тени. На самой этой границе $I/I_0 = {}^1/_4$. При положительных w интенсивность имеет чередующиеся максимумы и минимумы.

§ 61. Диффракция Фраунгофера

Существует целый ряд случаев диффракции, в которых интенсивность в точке наблюдения определяется всей волновой поверхностью; другими словами, в интеграле (59,2), определяющем u_P, существенна вся волновая поверхность, по которой происходит интегрирование. С другой стороны, мы попрежнему будем считать, что отклонение от геометрической оптики мало, т. е. в точку наблюдения P доходят только те лучи, которым надо мало отклониться от пути, по которому бы они шли согласно геометрической оптике. Поэтому вся волновая поверхность имеет значение только в следующих двух случаях.

Первым случаем является тот, когда точка наблюдения находится вблизи фокуса, т. е. точки, в которой сходятся геометрические пути всех лучей света.

Вторым, наиболее важным случаем является так называемая диффракция Фраунгофера. При диффракции Фраунгофера как источник света, так и точка наблюдения P находятся на очень больших (бесконечных) расстояниях от экранов[1]). Лучи идут теперь из источника света к экранам параллельным пучком; то же касается лучей, идущих от экранов к точке наблюдения. Поэтому при диффракции Фраунгофера мы интересуемся только изменением направления пучка света, т. е. ищем интенсивность как функцию от угла отклонения света от первоначального направления (угла диффракции). Поскольку мы рассматриваем малые отклонения от геометрической оптики, то этот угол должен быть мал.

Выведем общую формулу, определяющую диффракцию Фраунгофера от экранов и отверстий любой формы. Пусть свет идёт слева направо; выберем систему координат с началом где-нибудь слева от экрана. На рис. 9 O — начало координат, P — точка наблюдения и df — некоторый элемент волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в формуле (59,2):

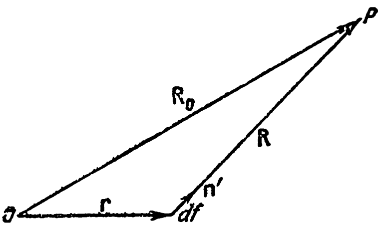

Рис. 9.

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n.$$

В падающем свете в рассматриваемом нами случае диффракции Фраунгофера все лучи имеют одинаковое направление, т. е. одинаковый волновой вектор $\mathbf{k}$ (единичный вектор в этом направлении $\mathbf{n}$). Точку наблюдения P надо представлять себе на бесконечном расстоянии от экранов; поэтому все лучи, идущие от экранов в P, тоже параллельны друг другу, т. е. имеют одинаковые волновые векторы $\mathbf{k}'$ (единичный вектор в этом направлении обозначим посредством $\mathbf{n}'$). Угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ есть угол диффракции ($\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ отличаются, конечно, только направлением, но не величиной).

Поле на поверхности интегрирования в выражении для u_P равно $u = u_0 e^{i\mathbf{kr}}$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор от O к df). В подинтегральном выражении величина $1/R$ может считаться постоянной, равной $1/R_0$. Мы находим, следовательно,

$$u_P = \frac{u_0}{2\pi i R_0} \int e^{i\mathbf{kr}} e^{ikR} df_n.$$

[1]) Экспериментально диффракция Фраунгофера наблюдается, конечно, не на бесконечном расстоянии, а при помощи расположенной за экраном линзы; в фокусной плоскости получается тогда диффракционная картина. Можно, однако, показать, что это обстоятельство ничего не меняет в последующих формулах (если только линза не слишком мала, так что в ней не происходит обусловленных ею самой диффракционных явлений).

Из рис. 9 видно, что $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$. Умножим это равенство с обеих сторон на $\mathbf{n}'$; при бесконечно далёкой точке P векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_0$ параллельны, и потому $\mathbf{R}_0\mathbf{n}'=R_0$. Таким образом,

$$R=R_0-\mathbf{r}\mathbf{n}',$$

так что

$$e^{ikR}=e^{ikR_0}e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$$

(так как $k\mathbf{n}'=\mathbf{k}'$). Множитель e^{ikR_0} есть постоянная. Мы получаем, следовательно, окончательно:

$$u_P=\frac{u_0e^{ikR_0}}{2\pi iR_0}\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}\,df_n. \tag{61,1}$$

Эта формула и определяет интенсивность $|u_P^2|$ как функцию от угла диффракции.

Рассмотрим диффракцию Фраунгофера от бесконечной щели с параллельными краями, прорезанной в непрозрачном экране (рис. 10). Выберем ось Z параллельно краям щели, ось Y перпендикулярно к плоскости щели (плоскость XZ).

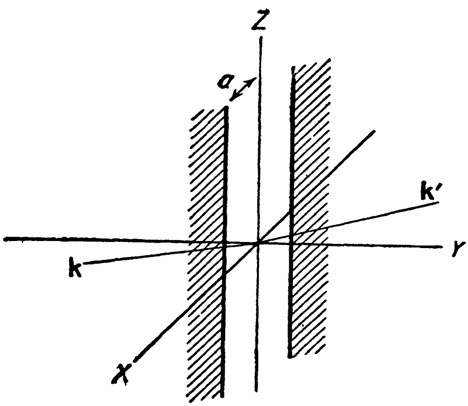

Рис. 10.

Выберем в (61,1) в качестве поверхности интегрирования плоскость щели между обеими её краями. Элемент интегрирования df_n равен тогда проекции элемента $dx\,dz$ этой плоскости на направление $\mathbf{k}$. Но поскольку все падающие лучи параллельны друг другу, угол между $\mathbf{k}$ и элементом $dx\,dz$ постоянен вдоль всей плоскости щели. Поэтому мы можем в (61,1) с точностью до постоянного множителя написать вместо df_n просто $dx\,dz$, так что

$$u_P\sim\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-a}^{+a}e^{i(k_x-k_x')x}e^{i(k_z-k_z')z}\,dx\,dz$$

($2a$ есть ширина щели). Интеграл по dz от периодической знакопеременной функции $e^{i(k_z-k_z')}$ равен нулю всегда, когда $k_z\neq k_z'$. Поэтому должно быть $k_z=k_z'$, т. е. свет отклоняется только в плоскости XY, как, впрочем, можно было ожидать из соображений симметрии. Выражение для u_P сводится, таким образом, к

$$u_P \sim \int\limits_{-a}^{+a} e^{i\varkappa x} dx,$$

где $\varkappa = k_x - k'_x$[1]. Интегрируя, находим

$$u_P \sim \frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}.$$

Отсюда находим для интенсивности dI света, подвергнувшегося диффракции в интервале $d\varkappa$ значений $\varkappa$:

$$dI = I_0 \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a} \right)^2 d\varkappa, \tag{61,2}$$

где постоянный множитель мы выбрали так, что I_0 есть полная интенсивность света, проходящего через щель (т. е. интеграл от dI по всем значениям $\varkappa$).

$\frac{dI}{d\varkappa}$ как функция от угла диффракции имеет вид, изображённый на рис. 11. При увеличении $\varkappa$ в ту и другую сторону от $\varkappa = 0$ интенсивность пробегает ряд чередующихся максимумов и минимумов. Высота максимумов быстро падает при увеличении $\varkappa$; самый большой максимум I имеет при $\varkappa = 0$. В минимумах $I = 0$. Эти минимумы имеют место при

$$\varkappa a = n\pi \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \tag{61,3}$$

Как уже указывалось в примечании на стр. 176, диффракция Фраунгофера наблюдается обычно при помощи системы линз. Параллельный пучок лучей, пройдя через линзу, собирается в её главном фокусе. В плоскости, проходящей через этот фокус перпендикулярно к оптической оси линзы, поле u_P будет равно нулю везде, за исключением самого фокуса. Если же перед линзой находится какой-либо экран, то пучок лучей подвергается диффракции; соответственно этому в фокальной плоскости линзы получается теперь не точечное изображение источника света, а некоторая протяжённая диффракционная картина.

Заменим теперь экран «дополнительным», т. е. таким, который имеет отверстия там, где первый экран не прозрачен, и наоборот. Обозначим поле в фокальной плоскости линзы в обоих случаях, соот-

---

[1]) $\varkappa$ может быть выражено через угол α диффракции, т. е. угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Именно, легко получить (для малых $\varkappa$ и α) формулу

$$\alpha = \frac{\varkappa \sin(\mathbf{k}, Z)}{k \cos(\mathbf{k}, Y)},$$

где $(\mathbf{k}, Y)$, $(\mathbf{k}, Z)$ — углы между $\mathbf{k}$ и осями Y и Z.

ветственно, посредством $u_P^{(1)}$ и $u_P^{(2)}$. Поскольку $u_P^{(1)}$ и $u_P^{(2)}$ выражаются интегралами, взятыми по отверстиям в экранах, а отверстия обоих экранов дополняют друг друга до целой плоскости, то $u_P^{(1)} + u_P^{(2)} = u_P$, где u_P — поле, получающееся в отсутствии экранов. Как было указано, $u_P = 0$ везде, кроме фокуса, откуда $u_P^{(1)} + u_P^{(2)} = 0$, или для соответствующих интенсивностей

$$|u_P^{(1)}|^2 = |u_P^{(2)}|^2. \tag{61,4}$$

Таким образом, дополнительные экраны дают одинаковую дифракционную картину во всей фокальной плоскости линзы, за исключением самого фокуса (так называемый принцип Бабине).

Упомянем здесь об одном интересном следствии принципа Бабине. Рассмотрим какое-нибудь чёрное тело, т. е. тело, полностью поглощающее весь падающий на него свет. Согласно геометрической оптике при освещении такого тела за ним образовалась бы область геометрической тени, площадь сечения которой была бы равна площади сечения тела в направлении, перпендикулярном направлению падения света. Наличие дифракции приведёт, однако, к тому, что свет, проходящий мимо тела, частично отклонится от своего первоначального направления. В результате на бо́льшом расстоянии позади тела тени не будет, а наряду со светом, распространяющимся в первоначальном направлении, будет также и некоторое количество света, распространяющегося под небольшими углами к своему первоначальному направлению. Легко определить интенсивность этого, как говорят, рассеянного света. Для этого замечаем, что согласно принципу Бабине количество света, отклонившегося благодаря дифракции на рассматриваемом теле, равно количеству света, отклоняющегося при дифракции от прорезанного в непрозрачном экране отверстия, форма и площадь которого совпадают с формой и площадью поперечного сечения тела. Но при дифракции Фраунгофера от отверстия происходит отклонение всего проходящего через отверстие света. Отсюда следует, что полное количество света, рассеянного на чёрном теле, равно количеству света, падающего на его поверхность и поглощаемого им.

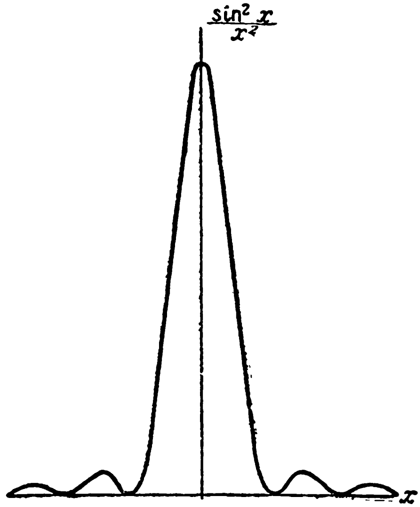

Рис. 11.

Задачи

1. Определить диффракцию Фраунгофера от прямоугольного отверстия (со сторонами $2a$ и $2b$).

Решение аналогично определению диффракции от щели. Вводя обозначения

$$k_x - k'_x = \varkappa_x, \quad k_z - k'_z = \varkappa_z$$

(оси X и Z параллельны сторонам прямоугольного отверстия), находим для интенсивности

$$dI = I_0 \frac{ab}{\pi^2}\left(\frac{\sin \varkappa_x a}{\varkappa_x a}\right)^2\left(\frac{\sin \varkappa_z b}{\varkappa_z b}\right)^2 d\varkappa_x\, d\varkappa_z.$$

2. Определить диффракцию Фраунгофера от диффракционной решётки — плоского экрана с прорезанным в нём рядом одинаковых параллельных щелей (ширина щели $2a$, ширина непрозрачного экрана между соседними щелями $2b$, число щелей N).

Решение. Выберем плоскость решётки в качестве плоскости XZ с осью Z, параллельной щелям. Интегрирование в (61,1) даёт

$$u_P = u'_P \sum_{n=0}^{N-1} e^{2in\varkappa d} = u'_P \frac{1 - e^{2iN\varkappa d}}{1 - e^{2i\varkappa d}},$$

где $\varkappa = k_x - k'_x$, $d = a + b$, а u'_P есть результат интегрирования по одной щели. Пользуясь (61,2), имеем для интенсивности $|u_P|^2$:

$$dI = \frac{I_0}{N} \frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin N\varkappa d}{\sin \varkappa d}\right)^2\left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 d\varkappa$$

(I_0 — полная интенсивность света, проходящего через все щели).

В случае большого числа щелей, т. е. $N \to \infty$, эту формулу можно написать в ином виде. При значениях $\varkappa = \frac{\pi n}{d}$ (n — целое число) $\frac{dI}{d\varkappa}$ имеет максимумы; вблизи такого максимума (т. е. при $\varkappa d = n\pi + \varepsilon$ ε мало):

$$dI = \frac{I_0}{N} \frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin \varkappa a}{\varkappa a}\right)^2 \frac{\sin^2 N\varepsilon}{\varepsilon^2}\, d\varkappa.$$

Но при $N \to \infty$ имеет место формула [1])

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\right) = \pi\delta(x),$$

---

[1]) Согласно формулам, известным из теории рядов Фурье:

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} f(x)\,\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\,dx\right\} = f(0).$$

Отсюда видно, что свойства функции $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\right)$ действительно совпадают со свойствами δ-функции (см. примечание на стр. 81).

т. е. вблизи каждого максимума полная интенсивность равна

$$I = I_0 \frac{d}{\pi a} \frac{\sin^2\left(n\pi \frac{a}{d}\right)}{n^2}.$$

3. Определить диффракцию Фраунгофера от круглого отверстия (радиуса a); свет падает перпендикулярно к плоскости отверстия.

Решение. Введём цилиндрические координаты z, r, φ с осью Z, проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости. Обозначим проекцию $\mathbf{k}'$ на эту плоскость посредством $\varkappa$ ($\varkappa = k\alpha$, где α — угол диффракции). Из соображений симметрии следует, что диффракция будет зависеть только от $\varkappa$; поэтому можно ограничиться рассмотрением луча, идущего в плоскости $\varphi = 0$. Тогда формула (61,1) даёт

$$u_P = \frac{ku_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\varkappa r \cos\varphi} r\, d\varphi\, dr = \frac{e^{ikR_0} ku_0}{iR_0} \int_0^a J_0(\varkappa r)\, r\, dr,$$

где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix\cos\varphi}\, d\varphi$ есть функция Бесселя нулевого ранга, u_0 — поле в самом отверстии. Из теории функций Бесселя известно, что

$$\int_0^a J_0(\varkappa r)\, r\, dr = \frac{aJ_1(a\varkappa)}{\varkappa}.$$

Интенсивность диффракции в телесный угол do получается умножением $|u_P|^2$ на $R_0^2\, do$. В результате находим для интенсивности dI света, подвергнувшегося диффракции,

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi \alpha^2} do,$$

где I_0 — полная интенсивность падающего света.

ГЛАВА VIII

ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

§ 62. Запаздывающие потенциалы

В гл. V мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами, а в гл. VI — переменное поле, но в отсутствии зарядов. Теперь мы займёмся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы произвольного электромагнитного поля. Этот вывод удобнее сделать в четырёхмерном виде. Для этого напишем вторую пару уравнений Максвелла в виде (29,2)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i.$$

Подставим сюда F_{ik}, выраженные через потенциалы, т. е.

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Тогда мы находим

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\,\partial x_k}-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2}=\frac{4\pi}{c}j_i. \qquad (62,1)$$

Наложим теперь на потенциалы A_i дополнительное условие

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0; \qquad (62,2)$$

написанное в трёхмерной форме, оно гласит:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \qquad (62,3)$$

Это условие является обобщением тех условий, которые мы накладывали на потенциалы в ранее рассмотренных случаях. Так, для постоянного поля (62,3) превращается в $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, т. е. в условие, совпадающее с (42,3). Для электромагнитного поля в пустоте (§ 44) мы выбирали потенциалы так, чтобы $\varphi = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; такие потенциалы удовлетворяют, очевидно, и условию (62,3)[1]).

Уравнение (62,1) превращается теперь в

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i. \tag{62,4}$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля. В трёхмерном виде оно записывается в виде двух уравнений — для $\mathbf{A}$ и для φ:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{62,5}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{62,6}$$

Для постоянного поля они превращаются в уже известные нам уравнения (35,4) и (42,4), а для переменного поля без зарядов — в уравнение (44,6). В (62,5) и (62,6) ρ и $\mathbf{j}$ суть функции, вообще говоря, от всех координат и от времени.

Решение неоднородных линейных уравнений (62,5) и (62,6) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим всё пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объёма. Благодаря линейности уравнений поля истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд de в данном элементе объёма является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объёма, то плотность заряда $\rho = de(t)\,\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — расстояние от начала координат (мы рассматриваем только один этот элемент).

Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{62,7}$$

---

[1]) Следует отметить, что, несмотря на дополнительное условие (62,3), потенциалы φ и $\mathbf{A}$ всё же остаются не вполне однозначными. Именно, к $\mathbf{A}$ можно прибавить $\operatorname{grad} f$, а из φ при этом вычесть $\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$, причём, однако, функция f теперь уже не произвольна, а должна удовлетворять, как легко убедиться, уравнению

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R})=0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0. \tag{62,8}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае φ обладает центральной симметрией, т. е. что φ есть функция только от R. Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (62,8) приобретёт вид

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi=\frac{\chi(R,t)}{R}$. Тогда для χ мы получим

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид (см. § 45):

$$\chi=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций f_1 и f_2. Обычно бывает удобным выбирать $f_2=0$ (см. об этом ниже). Тогда потенциал φ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi=\frac{\chi\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62,9}$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем её теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (62,7). Это легко сделать, заметив, что при $R\to 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R\to 0$ в уравнении (62,7) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta\varphi$. Тогда (62,7) переходит в известное уже нам уравнение (35,9), приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат (62,9) должно переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t)=de(t)$, т. е.

$$\varphi=\frac{de\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62,10}$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (62,6) для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$. Для этого достаточно в (62,10) написать $de = \rho\, dV$ (dV—элемент объёма) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (62,6) можно прибавить ещё решение φ_0 этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение (62,6) имеет вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{1}{R} \rho\left(x', y', z', t - \frac{R}{c}\right) dV' + \varphi_0,$$

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad dV' = dx'\, dy'\, dz'$$

(R есть расстояние от элемента объёма dV до «точки наблюдения», в которой мы ищем значение потенциала). Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t - \frac{R}{c}}}{R} dV + \varphi_0, \tag{62,11}$$

где индекс $t - \frac{R}{c}$ показывает, что значение ρ надо брать в момент времени $t - \frac{R}{c}$, а штрих у dV опущен.

Совершенно аналогично решается и уравнение (62,5). Очевидно

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t - \frac{R}{c}}}{R} dV + \mathbf{A}_0, \tag{62,12}$$

где $\mathbf{A}_0$ — решение уравнения (62,5) без правой части.

Потенциалы (62,11) и (62,12) без φ_0 и $\mathbf{A}_0$ называются запаздывающими потенциалами.

В случае неподвижных зарядов (т. е. не зависящей от времени плотности ρ) формула (62,11) переходит в известную уже нам формулу (35,8) $\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$ для электростатического поля, а (62,12) переходит (после усреднения) в формулу (42,5) для постоянного магнитного поля.

$\mathbf{A}_0$ и φ_0 в (62,11) и (62,12) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, достаточно задать начальные условия, т. е. поле в начальный момент времени. Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются обычно условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задаётся падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих R. Но этому условию, как видно из того, что мы положили $f_2 = 0$, удовлетворяет именно решение в виде (62,11) и (62,2), т. е. в виде запаздывающих потенциалов. Таким образом, в этом решении первые члены изображают собой поле, исходящее от системы, а φ_0 и $\mathbf{A}_0$ надо положить равными внешнему полю, действующему на систему.

§ 63. Потенциалы Лиенара-Вихерта

Применим формулы (62,11) и (62,12) к полю, создаваемому одним произвольно движущимся зарядом (элементарной частицей). В этом случае подинтегральные выражения в запаздывающих потенциалах могут быть отличными от нуля только в отдельных изолированных точках. Именно, легко видеть, что для каждого данного момента времени они будут отличны от нуля всего лишь в одной точке пространства. Для этого выберем точку наблюдения P с координатами x, y, z и момент наблюдения t в качестве начала O четырёхмерной системы координат и построим «световой конус» (см. стр. 17) с осью вдоль оси времени. Поверхность нижней полости этого конуса, охватывающая область «абсолютно прошедшего» (по отношению к событию O), представляет собой геометрическое место точек, таких, что посланный из них световой сигнал достигает мировой точки O. Точки, в которых эта поверхность пересекается мировой линией движения заряда, являются, очевидно, теми мировыми точками, в которых подинтегральные выражения в (62,11) и (62,12) отличны от нуля. Но поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то мировая линия его движения имеет везде меньший «наклон» к оси времени, чем «наклон» поверхности светового конуса. Поэтому ясно, что мировая линия частицы может пересечь нижнюю полость светового конуса только в одной точке. Соответствующий этой точке момент времени t' определяется, очевидно, уравнением

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t, \tag{63,1}$$

где t — момент наблюдения, а $R(t')$ — расстояние от заряда до точки наблюдения, являющееся заданной функцией времени.

Для того чтобы определить потенциалы, надо было бы рассматривать заряд конечных размеров и затем стремить его размеры к нулю. При этом, очевидно, множитель $1/R$ в подинтегральных выражениях в (62,11) и (62,12) можно вынести из-под знака интеграла. Однако заменить, скажем, в (62,11) интеграл от ρ просто величиной заряда e нельзя, в связи с тем, что разным точкам области интегрирования соответствуют различные моменты времени $t - \frac{R}{c}$.

Это можно сделать только, если в определяющийся из (63,1) момент времени t' частица покоится. Другими словами, в системе отсчёта, в которой в момент времени t' частица покоится, потенциалы в точке наблюдения в момент t равны:

$$\varphi = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A} = 0, \tag{63,2}$$

где R — расстояние от заряда до точки наблюдения в момент времени t' в этой системе отсчёта.

Выражения для потенциалов в произвольной системе отсчёта можно непосредственно получить, написав такой 4-вектор, который бы при $\mathbf{v} = 0$ давал для φ и $\mathbf{A}$ только что написанные выражения. Замечая, что φ из (63,2) можно написать также и в виде

$$\varphi = \frac{e}{c(t - t')}$$

(согласно (63,1)), находим, что искомый 4-вектор есть:

$$A_i = -e\frac{u_i}{R_k u_k}, \tag{63,3}$$

где u_i — 4-скорость заряда, R_k — 4-вектор с компонентами $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$, $c(t - t')$, причём x', y', z', t' связаны друг с другом соотношением (63,1), которое в четырёхмерном виде напишется так:

$$R_i^2 = 0. \tag{63,4}$$

Переходя теперь снова к трёхмерным обозначениям, получим для потенциалов поля, создаваемого произвольно движущимся точечным зарядом, следующие выражения:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{63,5}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведённый из точки нахождения заряда в точку наблюдения P, и все величины в правых частях равенств должны быть взяты в момент времени t', определяющийся из (63,1). Потенциалы поля в виде (63,5) называются потенциалами Лиенара-Вихерта.

Для вычисления напряжённостей электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

надо дифференцировать φ и $\mathbf{A}$ по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения. Между тем формулы (63,5) выражают потенциалы как функции от t', и лишь через соотношение (63,1) — как неявные функции от x, y, z, t. Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от t'. Дифференцируя соотношение $R(t') = c(t - t')$ по t, имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(значение $\frac{\partial R}{\partial t'}$ получается дифференцированием тождества $R^2 = \mathbf{R}^2$ и подстановкой $\frac{\partial \mathbf{R}(t')}{\partial t'} = -\mathbf{v}(t')$[1]), или

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{Rc}}. \tag{63,6}$$

Аналогично, дифференцируя то же соотношение по координатам, найдём:

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

откуда

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)}. \tag{63,7}$$

С помощью этих формул не представляет труда произвести вычисление полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Опуская промежуточные вычисления, приведём получающийся результат:

$$\mathbf{E} = e\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\cdot\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{63,8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{R}\mathbf{E}]. \tag{63,9}$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}$; все величины в правых сторонах равенств берутся в момент времени t'. Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным электрическому.

Наконец, приведём несколько другой способ написания потенциалов Лиенара-Вихерта, полезный в некоторых случаях. Он получается подстановкой в (63,5) выражений (63,1) и (63,6):

$$\varphi = \frac{e}{c(t - t')}\frac{\partial t'}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c}\varphi. \tag{63,10}$$

---

[1]) Знак минус связан с тем, что $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор от заряда e в точку P, а не наоборот.

§ 64. Спектральное разложение запаздывающих потенциалов

Поле, создаваемое движущимися зарядами, можно разложить на монохроматические волны. Потенциалы отдельной монохроматической компоненты (компоненты Фурье) поля имеют вид $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$; аналогичный вид имеют и другие величины, определяющие поле. Плотности заряда и тока системы зарядов, создающих поле, тоже можно разложить в ряд или интеграл Фурье. Ясно, что за создание определённой монохроматической компоненты поля ответственны соответствующие компоненты Фурье от ρ и $\mathbf{j}$.

Для того чтобы выразить компоненты Фурье поля через компоненты Фурье плотностей заряда и тока, подставляем в (62,11) вместо φ и ρ соответственно $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ и $\rho_\omega e^{-i\omega t}$. Мы находим тогда

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t} = \int \rho_\omega \frac{e^{-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{R} dV.$$

Сокращая на $e^{-i\omega t}$ и вводя абсолютную величину волнового вектора $k=\omega/c$, имеем:

$$\varphi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV. \tag{64,1}$$

Аналогично, для $\mathbf{A}_\omega$ получим[1]):

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV. \tag{64,2}$$

Заметим, что формула (64,1) представляет собой обобщение решения уравнения Пуассона на более общее уравнение вида

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho_\omega \tag{64,3}$$

(получающееся из уравнения (62,6) при ρ, φ, зависящих от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$). При $k=0$ формула (64,1) переходит в (35,8).

Если речь идёт о разложении в интеграл Фурье, то компонента Фурье плотности заряда есть (см. § 49)

$$\rho_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{-i\omega t} dt.$$

Подставляя это выражение в (64,1), получим:

$$\varphi_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV dt. \tag{64,4}$$

[1]) Мы пишем выражения для φ_ω и $\mathbf{A}_\omega$ в комплексном виде. Следует помнить, что всегда в таких случаях надо брать затем действительную часть не от самих этих величин, а от их произведений на $e^{-i\omega t}$.

Если же речь идёт о разложении в ряд Фурье в интервале времени T (период поля), то мы будем иметь [ср. (49,2)]:

$$\varphi_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int \frac{\rho}{R} e^{i(n\omega_0 t + kR)} dV dt. \tag{64,5}$$

Аналогичные выражения для $\mathbf{A}_\omega$ отличаются лишь заменой ρ на $\frac{1}{c}\,\mathbf{j}$ под знаком интеграла.

Применим полученные формулы к полю, создаваемому одним движущимся точечным зарядом. Пусть $\mathbf{r}_0(t)$ есть радиус-вектор этого заряда, являющийся заданной функцией времени. Тогда плотность зарядов:

$$\rho = e\delta\,[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]. \tag{64,6}$$

Подставляя это выражение в (64,4) и производя интегрирование по dV (сводящееся к замене $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_0(t)$), получим:

$$\varphi_\omega = \frac{e}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i[\omega t + kR(t)]}\, dt. \tag{64,7}$$

Аналогично для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{2\pi c} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{i[\omega t + kR(t)]}\, dt, \tag{64,8}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ — скорость заряда, а $R(t)$ — расстояние от заряда до точки наблюдения.

Задача

Разложить поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда на плоские волны.

Решение. Поступаем аналогично тому, как делалось в § 51. Плотность заряда пишем в виде $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Взяв компоненту Фурье от уравнения

$$\Box\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t),$$

находим

$$(\Box\varphi)_\mathbf{k} = -\frac{e}{2\pi^2} e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

С другой стороны, из

$$\varphi = \iiint e^{i\mathbf{kr}} \varphi_\mathbf{k}\, dk_x\, dk_y\, dk_z$$

имеем

$$(\Box\varphi)_\mathbf{k} = -k^2\varphi_\mathbf{k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_\mathbf{k}}{\partial t^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2 \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2} e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

откуда окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2} \frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ обладает частотой $\omega = (\mathbf{kv})$. Аналогично находим для векторного потенциала

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{\mathbf{v} e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Наконец, для поля имеем

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2} i \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{kv})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}] = \frac{e}{2\pi^2} \frac{[\mathbf{kv}]}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$

§ 65. Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка

В обычной классической механике систему взаимодействующих друг с другом частиц можно описывать с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей этих частиц (в один и тот же момент времени). Возможность этого в конечном итоге обусловлена тем, что в механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной.

Мы уже знаем, что благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными «степенями свободы». Отсюда следует, что если мы имеем систему взаимодействующих частиц (зарядов), то для её описания мы должны рассматривать систему, состоящую из этих частиц и поля. Поэтому при учёте конечной скорости распространения взаимодействий, вообще говоря, невозможно описывать систему взаимодействующих частиц с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частиц и не содержащей никаких величин, связанных с собственными «степенями свободы» поля. Однако если скорости v всех частиц малы по сравнению со скоростью света, то систему зарядов можно описывать некоторой приближённой функцией Лагранжа. При этом оказывается возможным ввести функцию Лагранжа, описывающую систему не только при пренебрежении всеми степенями v/c (классическая функция Лагранжа), но и с точностью до величин порядка v^2/c^2 (Дарвин, 1920).

Предварительно заметим, что в нулевом приближении, т. е. при полном пренебрежении запаздыванием потенциалов, функция Лагранжа для системы зарядов имеет вид

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} \tag{65,1}$$

(суммирование производится по зарядам, входящим в состав системы). Второй член есть потенциальная энергия взаимодействия, какой она была бы для неподвижных зарядов [см. (36,7)].

Для получения следующего приближения в функции Лагранжа поступим следующим образом. Функция Лагранжа для заряда, находящегося во внешнем поле, есть [см. (14,4)]

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Выбрав какой-нибудь один из зарядов системы, мы определим потенциалы поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке, где находится первый, и выразим их через координаты и скорости зарядов, создающих это поле (как раз это можно сделать только приближённо: φ — с точностью до членов порядка v^2/c^2, а $\mathbf{A}$ — до членов порядка v/c). Поставляя полученные таким образом выражения для потенциалов в приведённое выше выражение для L, мы получим функцию Лагранжа для одного из зарядов системы (при данном движении остальных). Отсюда уже без труда можно найти L для всей системы.

Будем исходить из выражений (62,11) и (62,12) для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV.$$

Если скорости всех зарядов малы по сравнению со скоростью света, то распределение зарядов, т. е. ρ и $\mathbf{j}$, не успевает сильно измениться за время R/c. Поэтому мы можем разложить $\rho_{t-\frac{R}{c}}$ и $\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}$ в ряд по степеням R/c. Для скалярного потенциала мы находим, таким образом, с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\, dV$$

(ρ без индексов есть ρ в момент времени t; $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ могут, очевидно, быть вынесены из-под знака интеграла). Но $\int \rho\, dV$ есть полный заряд, являющийся не зависящей от времени постоянной. Поэтому второй член в полученном выражении равен нулю, так что

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\, dV. \tag{65,2}$$

Аналогично можно поступить с $\mathbf{A}$. Но выражение для векторного потенциала через плотность тока содержит уже само по себе $1/c$, а при подстановке в функцию Лагранжа умножается ещё раз на $1/c$. Поскольку мы ищем функцию Лагранжа только с точностью до членов второго порядка, то в разложении $\mathbf{A}$ достаточно ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV \tag{65,3}$$

(мы подставили $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$).

Предположим, что имеется только один точечный заряд e (для нескольких надо взять сумму получающихся выражений). Тогда для потенциалов создаваемого им поля получаем из (65,2) и (65,3)

$$\varphi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65,4}$$

где R — расстояние от заряда.

Выберем вместо φ и $\mathbf{A}$ другие потенциалы φ' и $\mathbf{A}'$, сделав преобразование:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

причём в качестве f выберем функцию

$$f = \frac{e}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Тогда мы получим

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \qquad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}\text{[1]}.$$

Для вычисления $\mathbf{A}'$ заметим раньше всего, что $\nabla\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla R$. Операция ∇ означает здесь дифференцирование по координатам точки наблюдения, в которой ищется значение $\mathbf{A}'$. Поэтому ∇R равен единичному вектору $\mathbf{n}$, направленному от заряда e к точке наблюдения, так что

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

---

[1]) Потенциалы φ' и $\mathbf{A}'$ уже не будут удовлетворять уравнениям д'Аламбера, так как они не будут удовлетворять условию (62,3). В то же время, конечно, $\mathbf{A}'$ и φ' будут давать верный результат для поля, если φ и $\mathbf{A}$ дают этот результат.

Для вычисления $\dot{\mathbf{n}}$ пишем

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

Но производная $\dot{\mathbf{R}}$ при заданной точке наблюдения есть скорость — $\mathbf{v}$ заряда, а производную $\dot{R}$ легко определить, дифференцируя равенство $R^2 = \mathbf{R}^2$, т. е. написав

$$R\dot{R} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathbf{v}.$$

Таким образом

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R}.$$

Подставляя всё это в выражение для $\mathbf{A}'$, находим окончательно:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{n})\,\mathbf{n}]}{2cR}. \tag{65,5}$$

Если имеется несколько зарядов, то надо, очевидно, просуммировать по всем зарядам.

Подставляя эти выражения для потенциалов в функцию Лагранжа для заряда во внешнем поле, найдём функцию Лангранжа L_A заряда e_A (при заданном движении всех остальных зарядов). При этом нужно кинетическую энергию $-m_A c^2\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}$ тоже разложить по степеням v_A/c, оставляя члены до второго порядка. Таким образом, мы находим следующее выражение для L_A:

$$L_A = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_A v_A^4}{c^2} - e_A \sum_B \frac{e_B}{R_{AB}} + \frac{e_A}{2c^2}\sum_B \frac{e_B}{R_{AB}}[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_A\mathbf{n})(\mathbf{v}_B\mathbf{n})]$$

(суммирование производится по всем зарядам, за исключением e_A; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении между e_B и e_A).

Отсюда уже не представляет труда найти L для всей системы. Легко сообразить, что эта функция равна не сумме L_A для всех зарядов, а имеет вид

$$L = \sum_A \frac{m_A v_A^2}{2} + \sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2} - \sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}} + \sum_{A>B}\frac{e_A e_B}{2c^2 R_{AB}}[\mathbf{v}_A\mathbf{v}_B + (\mathbf{v}_A\mathbf{n})(\mathbf{v}_B\mathbf{n})]. \tag{65,6}$$

Действительно, для каждого из зарядов при заданном движении всех остальных эта функция L переходит в приведенную выше L_A. Выражение (65,6) и определяет функцию Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка.

Наконец, определим ещё функцию Гамильтона системы зарядов в том же приближении. Это можно было бы сделать по общим правилам нахождения $\mathscr{H}$ по L; однако проще поступить следующим образом. Второй и четвёртый члены в (65,6) представляют собой малую поправку к $L_0 = \sum\limits_A \frac{m_A v_A^2}{2} - \sum\limits_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$. С другой стороны, из механики известно, что при небольшом изменении L и $\mathscr{H}$ малые добавки к ним равны по величине и противоположны по знаку (причём изменение L рассматривается при постоянных координатах и скоростях, а изменение $\mathscr{H}$ — при постоянных координатах и импульсах[1]).

Поэтому мы можем сразу написать $\mathscr{H}$, вычтя из $\mathscr{H}_0 = \sum\limits_A \frac{p_A^2}{2m_A} + \sum\limits_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ те же второй и четвёртый члены из (65,6), заменив в них скорости на импульсы ($\mathbf{v}_A = \mathbf{p}_A/m_A$). Таким образом,

$$\mathscr{H} = \sum_A \frac{p_A^2}{2m_A} - \sum_A \frac{p_A^4}{8c^2 m_A^3} + \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}} - \\ - \sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{2c^2 m_A m_B R_{AB}} [\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B + (\mathbf{p}_A \mathbf{n})(\mathbf{p}_B \mathbf{n})]. \quad (65,7)$$

---

[1]) Если функция Лагранжа зависит, кроме координаты и скорости, ещё и от некоторого параметра λ, то

$$dL = F\,dq + p\,d\dot{q} + \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda$$

($F = \frac{\partial L}{\partial q}$, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ — обобщённые сила и импульс). Отсюда для $\mathscr{H} = p\dot{q} - L$ имеем

$$d\mathscr{H} = -F\,dq + \dot{q}\,dp - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda,$$

так что

$$\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}.$$

При небольшом изменении параметра λ $\mathscr{H}$ и L тоже немного меняются; из полученного равенства видно, что для изменений $\delta\mathscr{H}$ и δL имеет место равенство $(\delta\mathscr{H})_{q,p} = -(\delta L)_{q,\dot{q}}$ (индексы под скобками указывают, какие величины надо рассматривать как постоянные).

Задачи

1. Определить (с точностью до членов второго порядка) центр инерции системы взаимодействующих частиц.

Решение. Скорость $\mathbf{V}$ системы как целого определяется формулой

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{\mathscr{E}},$$

где $\mathbf{P} = \sum\limits_A \mathbf{p}_A = \sum\limits_A \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_A}$ есть полный импульс системы, а $\mathscr{E}$ — её энергия, равная $\sum m_A c^2 + \mathscr{H}$ [$\mathscr{H}$, написанное в виде (65,7), не включает в себя энергии покоя частиц]. После подстановки соответствующих выражений оказывается, что написанное соотношение может быть проинтегрировано по времени, так что понятие центра инерции системы взаимодействующих частиц в рассматриваемом приближении действительно существует. Для радиус-вектора $\mathbf{R}$ центра инерции получается выражение

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathscr{E}_A \mathbf{r}_A}{\sum \mathscr{E}_A},$$

где

$$\mathscr{E}_A = m_A c^2 + \frac{p_A^2}{2m_A} + \frac{e_A}{2} \sum_{B \neq A} \frac{e_B}{R_{AB}}.$$

2. Написать функцию Гамильтона во втором приближении для системы из двух частиц, исключив из неё движение системы как целого.

Решение. Выбираем систему отсчёта, в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. Написав импульсы как производные от действия, имеем: $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_2} = 0$. Отсюда видно, что в рассматриваемой системе отсчёта действие является функцией разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ радиус-векторов обеих частиц. Поэтому имеем $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$ есть импульс относительного движения частиц. Функция Гамильтона равна:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p^2 - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right) p^4 + \frac{e_1 e_2}{r} + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left[p^2 + (\mathbf{p}\mathbf{n})^2\right].$$

ГЛАВА IX

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 66. Поле системы зарядов на далёких расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на далёком расстоянии от этой системы (т. е. на расстоянии, большем по сравнению с размерами системы). При этом мы опять будем исходить из выражений для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \rho_{t-\frac{R}{c}} dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} \mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}} dV.$$

Выберем начало координат O где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-вектор из O в точку P, где мы ищем значение поля, обозначим через $\mathbf{R}_0$, а единичный вектор в этом направлении через $\mathbf{n}$. Радиус-вектор заряда $de = \rho dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от de в точку P пусть будет $\mathbf{R}$. Очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ и $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$. При интегрировании по dV в φ и $\mathbf{A}$ вектор $\mathbf{R}_0$ считается постоянным.

На больших расстояниях от системы зарядов $\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}$. Поэтому мы можем разложить функцию $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|$ в ряд по степеням $\mathbf{r}$, ограничившись членом первого порядка. По общей формуле

$$f(\mathbf{r}) \cong f(0) + \operatorname{grad} f(0) \cdot \mathbf{r}$$

получим

$$R = R_0 - \mathbf{rn}.$$

Подставим это в выражение для запаздывающих потенциалов. В знаменателе подинтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{rn}$ по сравнению с R_0. В $t - \frac{R}{c}$, однако, этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность такого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной R_0/c и $\mathbf{rn}/c$, а тем, насколько меняются сами ρ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{rn}/c$. Таким образом, для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов находим выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV, \tag{66,1}$$

$$A = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV. \tag{66,2}$$

На больших расстояниях от системы зарядов поле в не очень больших участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной создаваемых (или, как говорят, излучаемых) системой электромагнитных волн. Об этой области поля говорят как о «волновой зоне» излучения.

В плоской волне поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны друг с другом соотношением (45,4) $\mathbf{E} = [\mathbf{Hn}]$. Поскольку $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, то для полного определения поля в волновой зоне достаточно вычислить только векторный потенциал. В плоской волне имеем $\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]$ [ср. (46,3)], где точка над буквой означает дифференцирование по времени[1]). Таким

---

[1]) Легко проверить эту формулу непосредственным вычислением. Напишем (66,2) в виде $\mathbf{A} = \frac{1}{R_0}\cdot \mathbf{f}(t')$, где $\mathbf{f}(t')$ — функция от $t' = t - \frac{R_0}{c}$. Для $\mathbf{H}$ имеем $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\frac{1}{R_0}\mathbf{f}(t')$. При дифференцировании произведения $\frac{1}{R_0}\cdot\mathbf{f}$ можно считать множитель $\frac{1}{R_0}$ постоянным (так как при дифференцировании $\frac{1}{R_0}$ получился бы член, пропорциональный $\frac{1}{R_0^2}$, которым можно пренебречь по сравнению с членом с $\frac{1}{R_0}$), и дифференцировать только по R_0, содержащемуся в t'. Тогда $\mathbf{H} = \frac{1}{R_0}\operatorname{rot}\mathbf{f}(t')$. Для вектора, являющегося функцией только от t', имеет место соотношение:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(t') = \left[\nabla t' \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt'}\right] = -\frac{1}{c}\left[\mathbf{n}\frac{d\mathbf{f}}{dt'}\right]$$

$\left(\text{поскольку}\quad \nabla t' = -\frac{1}{c}\nabla R_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c}\right)$. Окончательно имеем:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{cR_0}[\dot{\mathbf{f}}\mathbf{n}] = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}],$$

что и требовалось доказать.

образом, зная **A**, найдём **H** и **E** по формулам[1]):

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}],\quad \mathbf{E}=\frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \tag{66,3}$$

Отметим, что поле на далёких расстояниях оказывается обратно пропорциональным первой степени расстояния (R_0) от излучающей системы. Следует также заметить, что время t входит в выражения (66,1 — 3) везде в комбинации $t-R_0/c$.

Для излучения, создаваемого одним произвольно движущимся точечным зарядом, бывает удобно пользоваться потенциалами Лиенара-Вихерта. На далёких расстояниях можно заменить в формуле (63,5) радиус-вектор R вектором R_0 (начало координат выбирается где-либо внутри конечной области пространства, в которой происходит движение заряда), а в условии (63,1), определяющем t', надо положить $R=R_0-\mathbf{r}_0\mathbf{n}$ [$\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор заряда]. Таким образом:

$$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \tag{66,4}$$

где t' определяется из равенства

$$t'-\frac{\mathbf{r}_0(t')}{c}\mathbf{n}=t-\frac{R_0}{c}. \tag{66,5}$$

Излучение электромагнитных волн сопровождается, конечно, излучением энергии. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга, равным в плоской волне:

$$\mathbf{S}=c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

Интенсивность dI излучения в элементе телесного угла do определяют как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент $df=R_0^2\,do$ шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом R_0. Это количество равно, очевидно, плотности потока энергии S, помноженной на df, т. е.

$$dI=c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2\,do. \tag{66,6}$$

Поскольку поле H обратно пропорционально R_0^2, то мы видим, что количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do, одинаково для всех расстояний [при одинаковых для них значениях $t-(R_0/c)$]. Так, разумеется, и должно было быть, так как излучаемая системой энергия распространяется

[1]) Формула $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$ [см. (45,3)] здесь не применима, так как потенциалы φ, **A** не удовлетворяют здесь тем дополнительным условиям, которые были наложены на них в § 45.

в окружающем пространстве со скоростью c, нигде не накопляясь и не исчезая.

Выведем формулы для спектрального разложения поля излучаемой системой волны. Эти формулы могут быть получены непосредственно из формул § 64. Подставляя в (64,2) $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (причём в знаменателе подинтегрального выражения можно ограничиться подстановкой $R = R_0$), получим для компоненты Фурье векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}} dV \tag{66,7}$$

(где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Компоненты $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ определятся по $\mathbf{A}_\omega$ с помощью формул (66,3). Подставляя в них вместо $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ и сокращая затем на $e^{-i\omega t}$, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega], \qquad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}[[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega]\mathbf{k}]. \tag{66,8}$$

Говоря о спектральном распределении интенсивности излучения, необходимо различать разложения в интеграл и ряд Фурье. С разложением в интеграл Фурье приходится иметь дело для излучения, сопровождающего столкновение заряженных частиц. При этом представляет интерес полное количество энергии, излучённой за время столкновения (и соответственно потерянной сталкивающимися частицами). Пусть $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}$ есть энергия, излучённая при столкновении в элемент телесного угла do в виде волн с частотами в интервале $d\omega$. Согласно общей формуле (49,8) доля полного излучения, приходящаяся на интервал частот $d\omega$, получается из обычного выражения для интенсивности заменой квадрата поля на квадрат модуля его компоненты Фурье и одновременным умножением на 4π. Поэтому имеем [ср. (66,6)]

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = c\,|\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2\, do\, d\omega. \tag{66,9}$$

Если же заряды совершают финитное периодическое движение, то поле излучения должно быть разложено в ряд Фурье. Согласно общей формуле (49,4) интенсивность отдельной компоненты разложения в ряд Фурье получается из обычного выражения для интенсивности заменой поля на его компоненту Фурье и одновременным умножением на 2. Таким образом, интенсивность излучения в элемент телесного угла do с частотой $\omega = n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}$ равна

$$dI_n = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_n|^2 R_0^2\, do. \tag{66,10}$$

Для спектрального разложения волны, излучаемой одним точечным зарядом (движущимся во внешнем поле), можно написать также выражение

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{2\pi c R_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e\mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]} dt, \tag{66,11}$$

получающееся из формулы (64,8), аналогично тому, как (66,7) получается из (66,2). Поскольку $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$, то $\mathbf{v}dt = d\mathbf{r}_0$ и эту формулу можно написать также и в виде контурного интеграла, взятого вдоль траектории заряда:

$$\mathbf{A}_\omega = e\frac{e^{ikR_0}}{2\pi c R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} d\mathbf{r}_0. \tag{66,12}$$

Компонента Фурье магнитного поля согласно (66,8) имеет вид:

$$\mathbf{H}_\omega = e\frac{i\omega e^{ikR_0}}{2\pi c^2 R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n} d\mathbf{r}_0]. \tag{66,13}$$

Формулы (66,11 — 13) определяют компоненты Фурье поля (разложенного в интеграл Фурье) непосредственно по закону движения излучающего заряда.

Если заряд совершает периодическое движение по замкнутой траектории, то поле должно разлагаться в ряд Фурье. Компоненты разложения в ряд Фурье получаются заменой в полученных формулах (66,11 — 13) множителя $1/2\pi$ на $1/T$, причём интегрирование производится по периоду T движения (см. § 49). Для компоненты Фурье магнитного поля с частотой $\omega = n\omega_0 = 2\pi n/T$ имеем:

$$\mathbf{H}_n = e\frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \int\limits_0^T e^{i[n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]} [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)]\, dt =$$

$$= e\frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n} d\mathbf{r}_0]. \tag{66,14}$$

Во втором интеграле интегрирование производится по замкнутой орбите частицы.

§ 67. Дипольное излучение

Временем $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$ в подинтегральных выражениях (66,1) и (66,2) для запаздывающих потенциалов можно пренебречь в случаях, когда за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка T (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{rn}/c$ будет порядка a/c. Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что это же условие (67,1) можно получить и из (66,7). В подинтегральном выражении $\mathbf{r}$ пробегает значения в интервале порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю. Поэтому показатель $i\mathbf{kr}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67,1).

Это условие можно написать ещё и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если v есть порядок величины скорости зарядов. Из $a \ll \lambda$ находим тогда

$$v \ll c, \tag{67,2}$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света.

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займёмся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны (а, следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы). Как было указано в § 66, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал.

Векторный потенциал (66,2) поля на далёких расстояниях имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV, \tag{67,3}$$

где $t' = t - R_0/c$. Время t' теперь уже не зависит от переменных интегрирования. Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем (67,3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\left(\sum e\mathbf{v}\right)$$

(суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс t' — все величины в правых сторонах равенств берутся в момент времени t'). Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где $\mathbf{d}$ есть дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}. \qquad (67,4)$$

С помощью формул (66,3) находим, что магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \qquad (67,5)$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0}[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \qquad (67,6)$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении излучение определяется второй производной от дипольного момента системы. Такое излучение называется дипольным.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, заряды могут излучать только в случае, если они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды, очевидно, не излучают.

Подставляя (67,5) в (66,6), получим интенсивность дипольного излучения:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\,\mathbf{n}]^2 do. \qquad (67,7)$$

Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do. Полное количество энергии, излучаемое в единицу времени по всем направлениям, получается интегрированием по всем углам. Для этого введём сферические координаты с полярной осью вдоль вектора $\ddot{\mathbf{d}}$. Полярный угол и азимут вектора $\mathbf{n}$ в этих координатах пусть будут θ и φ. θ есть, следовательно, угол между $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$. Тогда $do = \sin\theta d\theta d\varphi$ и (67,7) переходит в

$$dI = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^3\theta d\theta d\varphi.$$

Интегрируя по $d\varphi$ от 0 до 2π и по $d\theta$ от 0 до π, находим

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \qquad (67,8)$$

Если имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \qquad (67,9)$$

Отметим, что система, состоящая из частиц, у которых отношение зарядов к массе одинаково, не может излучать (дипольно). Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const.} \sum m\mathbf{r},$$

где const. есть одинаковое для всех зарядов отношение заряда к массе. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R}\sum m$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v \ll c$, так что применима нерелятивистская механика). Поэтому $\ddot{\mathbf{d}}$ пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

Наконец, выпишем формулы для спектрального разложения интенсивности дипольного излучения. Для излучения, сопровождающего столкновение, вводим количество $d\mathscr{E}_\omega$ энергии, излучённой за всё время столкновения в виде волн с частотами в интервале $d\omega$ (ср. § 66). Оно получится заменой в (67,8) вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ его компонентой Фурье $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ и одновременным умножением на 4π [ср. формулы (66,6) и (66,9)]:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8\pi}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)^2 d\omega.$$

По определению компоненты Фурье, имеем

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

откуда $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$. Таким образом, получаем:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_\omega|^2 d\omega. \qquad (67,10)$$

При периодическом движении частиц аналогичным образом найдём интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ [ср. (66,10)] в виде

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}|\mathbf{d}_n|^2. \qquad (67,11)$$

§ 68. Излучение при столкновениях

В задачах об излучении при столкновениях редко представляет интерес излучение, сопровождающее столкновение двух частиц, движущихся по определённым траекториям. Обычно приходится рассматривать рассеяние целого потока параллельно движущихся частиц, и задача состоит в определении полного излучения, отнесённого к единице плотности потока частиц.

Если плотность потока равна единице (т. е. в единицу времени через единицу площади сечения пучка проходит одна частица), то число частиц в потоке, имеющих «прицельное расстояние»[1]) между ρ и $\rho+d\rho$, равно $2\pi\rho d\rho$ (площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ и $\rho+d\rho$). Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения $\Delta\mathscr{E}$ одной частицы (с заданным значением прицельного расстояния) на $2\pi\rho d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до ∞. Определённая таким образом величина имеет размерность произведения энергии на площадь. Мы будем называть её эффективным излучением (по аналогии с эффективным сечением рассеяния) и будем обозначать посредством $\varkappa$:

$$\varkappa=\int\limits_0^\infty \Delta\mathscr{E}\cdot 2\pi\rho d\rho. \tag{68,1}$$

Совершенно аналогичным образом можно определить эффективное излучение в определённый элемент do телесного угла, в определённом интервале $d\omega$ частот и т. п.[2]).

Выведем общую формулу, определяющую распределение по направлениям излучения при рассеянии потока частиц центрально-симметрическим полем, предполагая излучение дипольным.

Интенсивность излучения (в каждый момент времени) отдельной частицей рассеиваемого потока определяется формулой (67,7), в которой $\mathbf{d}$ есть дипольный момент частицы относительно рассеивающего центра[3]). Прежде всего усредняем это выражение по всем направлениям вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ в плоскости поперечного сечения потока. Поскольку $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2=\ddot{\mathbf{d}}^2-(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$, то усреднению подлежит лишь величина $(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$. В силу центральной симметрии рассеивающего поля и параллельности падающего пучка частиц, рассеяние (а вместе с ним и излучение) обладает аксиальной симметрией относительно оси, проходящей через центр параллельно потоку. Выберем эту ось в качестве оси X. Из соображений симметрии очевидно, что произведения $\ddot{d}_x\ddot{d}_y$, $\ddot{d}_x\ddot{d}_z$ и $\ddot{d}_y\ddot{d}_z$ при усреднении дают нуль, а средние значения от $\ddot{d}_y^2$ и $\ddot{d}_z^2$ равны друг другу, причём, очевидно:

$$\overline{\ddot{d}_y^2}=\overline{\ddot{d}_z^2}=\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2-\ddot{d}_x^2).$$

---

[1]) Под прицельным расстоянием понимают расстояние, на котором прошли бы друг мимо друга сталкивающиеся частицы, если бы они двигались по прямым.

[2]) Если интегрируемое выражение зависит от угла, под которым расположена проекция дипольного момента частицы в плоскости поперечного сечения потока, то оно должно быть предварительно усреднено по всем направлениям в этой плоскости и лишь затем умножено на $2\pi\rho d\rho$ и проинтегрировано.

[3]) Фактически обычно речь идёт о дипольном моменте двух частиц — рассеиваемой и рассеивающей — относительно их общего центра инерции.

Имея всё это в виду, найдём без труда:

$$\overline{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2)\cos^2\theta,$$

где θ — угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью X.

Интегрируя интенсивность по времени и по всем прицельным расстояниям, получим следующее окончательное выражение, определяющее эффективное излучение в зависимости от направления излучения:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3}\left[A + B\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right], \tag{68,2}$$

где

$$A = \frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\mathbf{d}}^2 dt \cdot 2\pi\rho\, d\rho, \quad B = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2)\, dt \cdot 2\pi\rho\, d\rho. \tag{68,3}$$

Второй член в (68,2) написан в таком виде, чтобы при интегрировании по do он давал нуль.

Интенсивность излучения, сопровождающего рассеяние, можно разделить на две части — излучение, поляризованное в плоскости, проходящей через ось x и направление $\mathbf{n}$ (выберем эту плоскость в качестве плоскости XY), и излучение, поляризованное в плоскости, перпендикулярной к указанной. Вектор электрического поля имеет направление вектора

$$[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}] = \mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

[см. (67,6)]. Компонента этого вектора в направлении, перпендикулярном к плоскости XY, есть $-\ddot{d}_z$, а проекция на плоскость XY равна $\sin\theta\,\ddot{d}_x - \cos\theta\,\ddot{d}_y$. Возводя $\mathbf{E}$ в квадрат и усредняя по всем направлениям вектора $\mathbf{d}$ в плоскости YZ, мы прежде всего видим, что произведение проекций поля на плоскость XY и перпендикулярно к ней, обращается в нуль. Это значит, что интенсивность действительно может быть представлена в виде суммы двух независимых частей — интенсивностей излучения, поляризованного в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Интенсивность излучения с электрическим вектором в плоскости XY определяется средним квадратом $\overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)$. Для соответствующей части эффективного излучения получим выражение

$$d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\parallel} = \frac{do}{4\pi c^3}\,\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)\, dt \cdot 2\pi\rho\, d\rho. \tag{68,4}$$

Отметим, что эта часть излучения оказывается изотропной по направлениям. Выписывать выражение для эффективного излучения с направлением электрического поля в плоскости, перпендикулярной к оси пучка и к вектору $\mathbf{n}$, нет необходимости, так как очевидно, что $d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\parallel} + d\varkappa_{\mathbf{n}}^{\perp} = d\varkappa_{\mathbf{n}}$.

Аналогичным образом можно получить выражение для распределения по направлениям эффективного излучения в определённом интервале частот $d\omega$. Не повторяя заново всех рассуждений, вполне аналогичных произведённым выше, приведём окончательное выражение:

$$d\varkappa_{\mathbf{n},\,\omega} = \frac{do \cdot d\omega}{c^3}\left[A(\omega) + B(\omega)\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right], \tag{68,5}$$

где

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int_0^\infty \mathbf{d}_\omega^2\, 2\pi\rho\, d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int_0^\infty (\mathbf{d}_\omega^2 - d_{x\omega}^2)\, 2\pi\rho\, d\rho. \tag{68,6}$$

Далее, выведем некоторые формулы, относящиеся к той части спектрального разложения излучения при столкновении, в которой частоты удовлетворяют условию

$$\omega\tau \ll 1, \tag{68,7}$$

где τ — порядок величины продолжительности столкновения. В интеграле

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}\, e^{i\omega t}\, dt$$

поле излучения $\mathbf{H}$ заметно отлично от нуля только в течение промежутка времени порядка τ. Поэтому при соблюдении условия (68,7) мы можем считать, что под интегралом $\omega t \ll 1$, так что можно заменить $e^{i\omega t}$ единицей; тогда

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Подставляя сюда выражение (66,7) $\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]$ и производя интегрирование по времени, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi c}\,[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\,\mathbf{n}], \tag{68,8}$$

где $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ — изменение векторного потенциала поля, создаваемого сталкивающимися частицами, за время столкновения.

Подставляя (68,8) в (66,9), мы найдём полное излучение за время столкновения. Мы выпишем здесь лишь результат интегрирования по всем направлениям [интегрирование производится точно так же, как при выводе (67,8) из (67,7)]:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)^2 R_0^2\, d\omega. \tag{68,9}$$

Мы видим, что при малых частотах излучение не зависит от частоты, т. е. при $\omega \to 0$ $\frac{d\mathscr{E}_\omega}{d\omega}$ стремится к постоянному пределу[1]).

Если скорости сталкивающихся частиц малы по сравнению со скоростью света и излучение дипольно, то, воспользовавшись выражением (67,5), получим:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c^3}\left(\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\right)^2, \tag{68,10}$$

где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц до и после столкновения, а суммирование производится по сталкивающимся частицам. Если же скорости частиц сравнимы со скоростью света, то в (68,9) следует пользоваться потенциалом поля в форме (66,4).

§ 69. Излучение при кулоновом взаимодействии

В этом параграфе мы выведем, для справочных целей, ряд формул, относящихся к дипольному излучению системы из двух заряженных частиц; предполагается, что скорости частиц малы по сравнению со скоростью света.

Равномерное движение системы как целого (т. е. движение её центра инерции) не представляет интереса, так как не приводит к излучению; поэтому мы должны рассматривать только относительное движение частиц. Выберем начало координат в центре инерции. Тогда дипольный момент системы $\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2$ напишется в виде

$$\mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \tag{69,1}$$

где индексы 1 и 2 относятся к обеим частицам, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ есть радиус-вектор между ними.

Начнём с излучения, сопровождающего эллиптическое движение двух притягивающихся по закону Кулона частиц. Как известно из

1) Интегрируя по прицельным расстояниям, можно получить аналогичный результат для эффективного излучения при рассеянии пучка частиц. Надо, однако, иметь в виду, что этот результат несправедлив для эффективного излучения при кулоновом взаимодействии сталкивающихся частиц, в связи с тем, что интеграл по $d\rho$ оказывается расходящимся (логарифмически) при больших ρ. Мы увидим в следующем параграфе, что в этом случае эффективное излучение при малых частотах зависит логарифмически от частоты, а не остаётся постоянным.

механики[1]), это движение может быть описано как движение частицы с массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (приведённая масса частиц m_1 и m_2) по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах имеет вид

$$1 - \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \tag{69,2}$$

где большая полуось a и эксцентриситет ε равны:

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{69,3}$$

Здесь $\mathcal{E}$ есть полная энергия частиц (отрицательная при финитном движении), $M = \mu r^2 \dot{\varphi}$ — момент количества движения, α — постоянная закона Кулона ($\alpha = |e_1 e_2|$). Зависимость координат от времени может быть записана в виде параметрических уравнений

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi - \varepsilon \sin \xi). \tag{69,4}$$

Одному полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра ξ от нуля до 2π; период движения равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

Определим компоненты Фурье дипольного момента. Ввиду периодичности движения речь идёт о разложении в ряд Фурье. Поскольку дипольный момент пропорционален радиус-вектору $\mathbf{r}$, то задача сводится к вычислению компонент Фурье от координат $x = r\cos\varphi$ и $y = r \sin\varphi$. Зависимость x и y от времени определяется согласно (69,2)—(69,4) параметрическими уравнениями:

$$x = a(\varepsilon - \cos\xi), \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi,$$
$$\omega_0 t = \xi - \varepsilon \sin \xi \tag{69,5}$$

$\left(\text{мы ввели частоту } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}\right)$.

Вместо компонент Фурье от координат удобнее вычислять компоненты Фурье от скоростей, воспользовавшись тем, что $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Имеем:

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega_0 n t}\dot{x}\,dt.$$

Но $\dot{x}dt = dx = a \sin\xi\, d\xi$; переходя от интегрирования по dt к инте-

[1]) См., например, «Механика», § 20.

грированию по $d\xi$, имеем, таким образом:

$$x_n = \frac{ia}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} \sin \xi \, d\xi.$$

Аналогичным образом находим:

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} \cos \xi \, d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n\varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} \, d\xi$$

(при переходе от первого интеграла ко второму в подинтегральном выражении пишем $\cos\xi \equiv \left(\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$; тогда интеграл с $\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}$ берётся и притом тождественно обращается в нуль). Наконец, воспользовавшись известной формулой теории функций Бесселя, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x \sin \xi)} \, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\xi - x \sin \xi) \, d\xi = J_n(x),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя целочисленного порядка n. В результате окончательно получаем следующие выражения для искомых компонент Фурье:

$$x_n = \frac{a}{n} J'_n(n\varepsilon), \quad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon) \tag{69,6}$$

(штрих у функции Бесселя обозначает дифференцирование по её аргументу).

Выражение для интенсивности монохроматических компонент излучения получается подстановкой x_ω и y_ω в формулу (67,11):

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^2 a^2}{3c^3} \left[J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_n^2(n\varepsilon) \right] \left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \right)^2. \tag{69,7}$$

Выпишем, в частности, асимптотическое выражение для интенсивности при очень больших n[1]):

$$I_n = \frac{2\omega_0^4 a^2 n}{3\pi c^3 \varepsilon^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right]^{2n}. \tag{69,8}$$

---

[1]) Для получения формулы (69,8) из (69,7) надо воспользоваться известной из теории бесселевых функций асимптотической формулой

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\varepsilon^2)^{1/4}} \left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right]^n,$$

справедливой при $n(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$. Укажем, что В. А. Фоком была получена более общая формула, определяющая $J(n\varepsilon)$ при больших n и произвольных ε (ДАН, 1, 97, 1934).

Эта формула применима, если ε не слишком близко к единице; именно необходимо выполнение условия

$$n(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1.$$

Далее рассмотрим столкновение двух притягивающихся заряженных частиц. Их относительное движение описывается как движение частицы с массой μ по гиперболе

$$1-\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}, \qquad (69,9)$$

где

$$a=\frac{\alpha}{2\mathscr{E}}, \quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu\alpha^2}}, \qquad (69,10)$$

(теперь $\mathscr{E}>0$). Зависимость r от времени определяется параметрическими уравнениями

$$r=a(\varepsilon\operatorname{ch}\xi-1), \quad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon\operatorname{sh}\xi-\xi), \qquad (69,11)$$

где параметр ξ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Для координат x, y имеем

$$x=a(\operatorname{ch}\xi-\varepsilon), \quad y=a\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{sh}\xi. \qquad (69,12)$$

Вычисление компонент Фурье (речь идёт теперь о разложении в интеграл Фурье) производится в точности аналогично предыдущему случаю. Получаем в результате:

$$x_\omega=-\frac{a}{2\omega}H^{(1)'}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right), \quad y_\omega=-\frac{a\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2\omega\varepsilon}H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right). \qquad (69,13)$$

Здесь $H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}$ есть функция Ганкеля 1-го рода ранга $i\omega/\omega_0$ и введено обозначение $\omega_0=\sqrt{\alpha/\mu a^3}$ (ω_0 не является, конечно, теперь частотой движения). При вычислении использована формула теории бесселевых функций

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu\xi-ix\operatorname{sh}\xi}d\xi=i\pi H^{(1)}_\nu(ix). \qquad (69,14)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (66,10), получим полное излучение при столкновении в интервале частот $d\omega$[1]:

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{2\pi\omega^2a^2}{3c^3}\left(\frac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\right)^2\left\{-\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}\left[H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right)\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[H^{(1)'}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right)\right]^2\right\}d\omega. \qquad (69,15)$$

---

[1]) При взятии квадратов модулей надо иметь в виду, что y_ω чисто мнимо, а x_ω — чисто действительно.

Больший интерес представляет «эффективное излучение», характеризующее излучение при рассеянии потока параллельно движущихся частиц (см. предыдущий параграф). Для его вычисления умножаем $d\mathscr{E}_\omega$ на $2\pi\rho\, d\rho$ и интегрируем по всем ρ от нуля до бесконечности. Интегрирование по $d\rho$ заменяем интегрированием по $d\varepsilon$ (в пределах от 1 до ∞), воспользовавшись тем, что $2\pi\rho d\rho = 2\pi a^2\varepsilon\, d\varepsilon$ (это соотношение получается из определений (69,9), в которых момент M и энергия $\mathscr{E}$ связаны с прицельным расстоянием ρ и скоростью частиц на бесконечности v_0 посредством $M = \mu\rho v_0$, $\mathscr{E} = \mu v_0^2/2$). Получающийся интеграл берётся непосредственно с помощью формулы

$$z\left[Z_p'^2 + \left(\frac{p^2}{z^2} - 1\right) Z_p^2\right] = \frac{d}{dz}\left(z Z_p Z_p'\right),$$

где $Z_p(z)$ — любое решение уравнения Бесселя порядка p [1]). Имея в виду, что при $\varepsilon \to \infty$ функция Ганкеля $H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right)$ обращается в нуль, получим в результате следующую формулу:

$$d\varkappa_\omega = \frac{4\pi^2 i a^2\omega}{3c^3}\sqrt{\frac{\alpha a}{\mu}}\left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right). \quad (69,16)$$

Рассмотрим особо предельные случаи малых и больших частот. В интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi - \operatorname{sh}\xi)}\, d\xi = i\pi H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right), \quad (69,17)$$

определяющем функцию Ганкеля, существенна только та область значений переменной интегрирования ξ, в которой экспонента имеет порядок величины единицы. При малых частотах ($\omega \ll \omega_0$) существенна поэтому область больших ξ. Но при больших ξ имеем $\operatorname{sh}\xi \gg \xi$. Таким образом, приближённо

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega}{\omega_0}\operatorname{sh}\xi}\, d\xi = H_0^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right).$$

Аналогичным образом найдём, что

$$H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong H_0^{(1)\prime}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right).$$

---

[1]) Эта формула является непосредственным следствием уравнения Бесселя

$$Z'' + \frac{1}{z}Z' + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)Z = 0.$$

Воспользовавшись, наконец, известным из теории функций Бесселя приближённым выражением (при малых x)

$$iH_0^{(1)}(ix) \cong \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$, где C — постоянная Эйлера; $\gamma = 1{,}78107\ldots$), получим следующее выражение для эффективного излучения при малых частотах

$$\left.\begin{aligned} d\varkappa_\omega &= \frac{16 e_1^2 e_2^2}{3 v_0^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ln \left(\frac{2 v_0^3 m_1 m_2}{\gamma\omega\, |e_1 e_2|\, (m_1 + m_2)}\right) d\omega \\ &\text{при } \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{|e_1 e_2|}. \end{aligned}\right\} \tag{68,18}$$

Оно зависит от частоты логарифмически.

При больших частотах ($\omega \gg \omega_0$) в интеграле (69,17) существенны, напротив, малые ξ. Соответственно этому разлагаем экспоненту подинтегрального выражения по степеням ξ и имеем приближённо:

$$H_{\frac{i\omega}{\omega_0}}^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3} d\xi = -\frac{2i}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3} d\xi \right\}.$$

Этот интеграл подстановкой $\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3 = \eta$ приводится к Γ-функции, и в результате получается:

$$H_{\frac{i\omega}{\omega_0}}^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6\omega_0}{\omega}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Аналогичным образом найдём:

$$H_{\frac{i\omega}{\omega_0}}^{(1)\prime}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6\omega_0}{\omega}\right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Наконец, воспользовавшись известной формулой теории Γ-функций

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

получим для эффективного излучения при больших частотах:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi e_1^2 e_2^2}{3\sqrt{3}\, v_0^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega, \quad \text{при } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{|e_1 e_2|}, \tag{69,19}$$

т. е. выражение, не зависящее от частоты.

Перейдём теперь к излучению, сопровождающему столкновение двух отталкивающихся по закону $U = \alpha/r$ ($\alpha > 0$) частиц. Движение происходит по гиперболе

$$-1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{r}; \tag{69,20}$$

зависимость от времени определяется параметрическими уравнениями

$$x = a(\varepsilon + \operatorname{ch}\xi), \quad y = -a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\operatorname{sh}\xi,$$
$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon \operatorname{sh}\xi + \xi) \tag{69,21}$$

[a и ε — из (69,10)]. Все вычисления для этого случая непосредственно приводятся к произведённым выше, так что нет необходимости производить их заново. Действительно, интеграл

$$x_\omega = \frac{ia}{2\pi\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\varepsilon \operatorname{sh}\xi + \xi)} \operatorname{sh}\xi \, d\xi$$

для компоненты Фурье координаты x подстановкой $\xi \to i\pi - \xi$ приводится к такому же интегралу для случая притяжения, умноженному на $e^{-\pi\omega/\omega_0}$; то же самое имеет место для y_ω.

Таким образом, выражения для компонент Фурье x_ω, y_ω в случае отталкивания отличаются от соответствующих выражений для случая притяжения множителями $e^{-\pi\omega/\omega_0}$. В формулах же для излучения появятся, следовательно, лишние множители $e^{-2\pi\omega/\omega_0}$. В частности, для малых частот получается прежняя формула (69,18) (так как при $\omega \ll \omega_0 : e^{-2\pi\omega/\omega_0} \cong 1$). Для больших же частот эффективное излучение имеет вид:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi e_1^2 e_2^2}{3\sqrt{3} v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 e^{-\frac{2\pi\omega e_1 e_2}{\mu v_0^3}} d\omega, \quad \text{при } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{e_1 e_2}. \tag{69,22}$$

Оно убывает экспоненциально с увеличением частоты.

Задачи

1. Определить полную среднюю интенсивность излучения при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов.

Решение. С выражением (69,1) для дипольного момента имеем для полной интенсивности излучения

$$I = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2.$$

Согласно уравнению движения $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{|e_1 e_2|}{r^3}\mathbf{r}$ (μ — приведённая масса), так что

$$I = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

r выражаем через φ согласно уравнению орбиты (69,2), а интегрирование по времени с помощью равенства $dt = \mu r^2 d\varphi/M$ заменяем интегрированием по углу (от 0 до 2π). В результате находим для средней интенсивности $\overline{I} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I dt$ следующее выражение:

$$\overline{I} = \frac{2^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}|e_1e_2|^3|\mathscr{E}|^{3/2}}{M^5}\left(3 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu e_1^2 e_2^2}\right).$$

2. Определить полное излучение $\Delta\mathscr{E}$ при столкновении двух заряженных частиц.

Решение. В случае притяжения траекторией является гипербола (69,9), а в случае отталкивания — (69,20). Асимптоты гиперболы образуют с её осью угол φ_0, определяемый из $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, а угол отклонения частиц (в системе координат, в которой центр инерции покоится) есть $\chi = \pi - 2\varphi_0$. Вычисление производится так же, как в задаче 1 (интеграл по $d\varphi$ берётся в пределах между $-\varphi_0$ и $+\varphi_0$). В результате находим в случае притяжения

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3|e_1e_2|}\operatorname{tg}^3\frac{\chi}{2}\left\{(\pi+\chi)\left(1+3\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)+6\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

а в случае отталкивания:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3 e_1e_2}\operatorname{tg}^3\frac{\chi}{2}\left\{(\pi-\chi)\left(1+3\operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)-6\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right).$$

В обоих случаях под χ понимается положительный угол, определяющийся из соотношения $\operatorname{ctg}(\chi/2) = \mu v_0^2\rho/|e_1e_2|$ (ρ — «прицельное расстояние»).

Так, при «лобовом» столкновении ($\rho = 0$, $\chi = \pi$) отталкивающихся зарядов:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3 e_1e_2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. Определить полное эффективное излучение при рассеянии потока частиц (с зарядами e_1 и массами m_1) зарядом e_2 (с массой m_2; заряды e_1 и e_2 — одного знака).

Решение. Искомая величина есть

$$\varkappa = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{\infty} I dt\cdot 2\pi\rho\, d\rho = \frac{2e_1^2e_2^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r^4}dt\cdot\rho\, d\rho.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr вдоль траектории заряда, написав $dt = \frac{dr}{v_r}$, где радиальная скорость $v_r \equiv \dot{r}$ выражается через r по формуле

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathscr{E} - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r)\right]} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2e_1e_2}{\mu r}}.$$

Интегрирование по dr производится в пределах от ∞ до ближайшего к центру расстояния r_0 (точка, в которой $v_r = 0$), и затем от r_0 снова к бесконечности; это сводится к удвоенному интегралу от r_0 до ∞, Вычисление двойного интеграла удобно производить, переменив порядок интегрирования — интегрировать сначала по $d\rho$, а затем по dr. В результате вычисления получается следующий результат:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{9} \frac{e_1 e_2 m_1 m_2}{c^3 (m_1 + m_2)} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 .$$

4. Определить распределение по направлениям полного излучения при пролетании одного заряда мимо другого, если скорость настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейного движения можно считать малым.

Решение. Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть a/ρ ($\mu v^2 \gg a\rho$). Выберем направление движения в качестве оси X, а начало координат — опять в центре инерции. В первом приближении траектория определяется как $x = vt$, $y = \rho$. В следующем приближении уравнения движения дают

$$\mu \ddot{x} = \frac{a}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{avt}{r^3}, \quad \mu \ddot{y} = \frac{a}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{a\rho}{r^3}$$

где для r можно писать $r = \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$. Интегрируя с помощью этих выражений формулу (67,7) по времени от $-\infty$ до $+\infty$, находим для полного излучения в телесный угол do:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{a^2}{32 v c^3 \rho^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(4 - 3n_x^2 - n_y^2\right) do$$

(n_x, n_y — компоненты единичного вектора $\mathbf{n}$ в направлении do).

§ 70. Квадрупольное и магнитное дипольное излучения

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала (66,2). Если размеры системы малы по сравнению с длиной волны, то эти члены, вообще говоря, значительно меньше первого члена, дающего дипольное излучение. Они, однако, существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы зарядов равен нулю, и потому дипольное излучение отсутствует.

Разлагая (66,2), т. е.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t' + \frac{\mathbf{rn}}{c}} dV,$$

по степеням $\frac{\mathbf{rn}}{c}$, находим с точностью до членов первого порядка:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\mathbf{rn})\, \mathbf{j}_{t'}\, dV.$$

Подставляя $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, переписываем это выражение в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\sum e\mathbf{v}'}{cR_0} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \sum e\mathbf{v}' (\mathbf{r}'\mathbf{n}). \tag{70,1}$$

(Ниже, как и в § 67, мы будем для краткости отпускать индекс t'.)

Во втором слагаемом в правой части можно написать:

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv}) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\mathbf{n}].$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}],$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы, а $\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ — её магнитный момент. Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$, причём в силу формул (66,3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не изменятся.

Прибавим на этом основании к полученному для $\mathbf{A}$ выражению вектор $-\frac{\mathbf{n}}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum er^2$; тогда получим:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e[3\mathbf{r}(\mathbf{nr}) - \mathbf{n}r^2] + \frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}].$$

Но стоящее под знаком $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ выражение есть не что иное, как произведение, $n_\beta D_{\alpha\beta}$, вектора $\mathbf{n}$ на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r^2)$ (см. § 40). Вводя вектор $\mathbf{D}$ с компонентами $D_\alpha = D_{\alpha\beta}n_\beta$, находим окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]. \tag{70,2}$$

Зная $\mathbf{A}$, мы можем теперь определить поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ излучения. С помощью общей формулы (66,3) находим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] + \frac{1}{6c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}] + [[\ddot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},\\ \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] + \frac{1}{6c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] + [\mathbf{n}\ddot{\mathfrak{m}}]\right\}.\end{aligned} \tag{70,3}$$

Интенсивность dI излучения в телесный угол do определяется по общей формуле (66,6). Мы определим здесь полное излучение, т. е. энергию, излучаемую системой в единицу времени по всем направлениям. Для этого усредним dI по всем направлениям $\mathbf{n}$; полное излучение равно, очевидно, этому среднему, умноженному на 4π. При усреднении квадрата магнитного поля все произведения первого, второго и третьего членов в $\mathbf{H}$ друг на друга исчезают, так что остаются только средние квадраты каждого из них. Несложные вычисления [1]) дают в результате следующее выражение для I:

$$I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}+\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathfrak{m}}^2. \tag{70,4}$$

Таким образом, полное излучение состоит из трёх независимых частей; они называются соответственно дипольным, квадрупольным и магнитным дипольным излучениями.

Отметим, что магнитно-дипольное излучение фактически во многих случаях отсутствует. Так, оно отсутствует у системы, в которой отношение заряда к массе у всех движущихся частиц одинаково (в этом случае отсутствует и дипольное излучение, как уже было отмечено в § 67). Действительно, у такой системы магнитный момент пропорционален механическому моменту импульса (см. § 43), и потому, в силу закона сохранения последнего, $\dot{\mathfrak{m}}=0$. По той же причине (см. задачу к § 43) магнитно-дипольное излучение отсутствует у всякой системы, состоящей всего из двух частиц (чего, однако, нельзя сказать о дипольном излучении).

Задача

Вычислить полное эффективное излучение при рассеянии потока заряженных частиц одинаковыми с ними частицами.

Решение. Дипольное (а также магнитно-дипольное) излучение при столкновении одинаковых частиц отсутствует, так что надо вычислить квадрупольное излучение. Тензор квадрупольного момента системы из двух одинаковых частиц (относительно их общего центра инерции) равен

$$D_{\alpha\beta}=\frac{e}{2}(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}),$$

где x_α — компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$ между частицами. Это выражение подставляем в формулу $I=\frac{1}{180\,c^5}\dddot{D}\,{}_\beta$ для интенсивности излучения.

---

[1]) Приведём удобный метод усреднения произведений компонент единичного вектора. Поскольку $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, то $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным тензором, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$, т. е. $\overline{n_\alpha n_\beta}=a\delta_{\alpha\beta}$; упрощая по паре индексов α, β и помня, что $n_\alpha^2=1$, находим, что $a=1/3$.

Для среднего значения произведения четырёх компонент пишем аналогично

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}=a\,(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

(имея в виду симметричность $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$ по всем четырём индексам); упрощая по парам индексов α, β и γ, δ, находим $a=1/15$.

Первую, вторую и третью производные по времени от координат x_α выражаем через относительную скорость частиц v_α согласно:

$$\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \mu\ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha = e^2\,\frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4}$$

где $v_r = \mathbf{vr}$ — радиальная компонента скорости (второе равенство есть уравнение движения заряда, а третье получается дифференцированием второго). Вычисление приводит к следующему выражению для интенсивности:

$$I = \frac{4e^6}{5m^2c^5}\,\frac{1}{r^4}(v^2 + 11v_\varphi^2)$$

($v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$); v и v_φ выражаем через r с помощью равенств

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \qquad v_\varphi = \frac{\rho v_0}{r}.$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr подобно тому, как это было сделано в задаче 3 к § 69, именно, написав

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}.$$

В двойном интеграле (по dr и $d\rho$) производим сначала интегрирование по $d\rho$, а затем по dr. В результате вычислений получается следующий результат:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

§ 71. Поле излучения на близких расстояниях

Формулы дипольного излучения были выведены нами для поля на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны (и тем более по сравнению с размерами излучающей системы). В этом параграфе мы будем попрежнему считать, что длина волны велика по сравнению с размерами системы, но будем рассматривать поле на расстояниях, хотя и больших по сравнению с последними, но по порядку величины равных длине волны.

Формула (67,4) для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{71,1}$$

попрежнему остаётся в силе, так как для её вывода было использовано только то, что R_0 велико по сравнению с размерами системы. Однако поле нельзя рассматривать теперь даже в небольших участках как плоскую волну. Поэтому формулы (67,5) и (67,6) для электрического и магнитного полей уже неприменимы, и для их вычисления надо определить предварительно как $\mathbf{A}$, так и φ.

Формулу для скалярного потенциала можно получить из выражения для $\mathbf{A}$ непосредственно с помощью общего условия (62,3)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

накладываемого на потенциалы. Подставляя в него (71,1) и интегрируя по времени, найдём

$$\varphi=-\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{71,2}$$

Постоянную интегрирования (произвольную функцию координат) мы не пишем, так как нас интересует только переменная часть потенциала. Напомним, что в формуле (71,2), как и в (71,1), значение $\mathbf{d}$ должно браться в момент времени $t'=t-R_0/c$ [1]).

Теперь уже не представляет труда вычислить электрическое и магнитное поле. По обычным формулам, связывающим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с потенциалами, находим:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{71,3}$$

$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}-\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \tag{71,4}$$

Выражение для $\mathbf{E}$ можно переписать в другом виде, заметив, что $\frac{\ddot{\mathbf{d}}_{t'}}{R_0}$ (как и всякая функция координат и времени вида $\frac{1}{R_0}f\left(t-\frac{R_0}{c}\right)$) удовлетворяет уравнению д'Аламбера:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}=\Delta\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}.$$

Воспользовавшись также известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\Delta\mathbf{a},$$

найдём, что

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{71,5}$$

Полученные формулы определяют поле на расстояниях порядка длины волны. Во всех этих формулах нельзя, разумеется, выносить $1/R_0$ из-под знака дифференцирования по координатам, так как

---

[1]) Иногда вводят так называемый вектор Герца, определяемый посредством

$$\mathbf{Z}=-\frac{1}{R_0}\,\mathbf{d}\left(t-\frac{R_0}{c}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{A}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}},\quad \varphi=\operatorname{div}\mathbf{Z}.$$

отношение членов, содержащих $1/R_0^2$, к членам с $1/R_0$ как раз порядка величины отношения длины волны к R_0.

Наконец, напишем формулы для компонент Фурье поля. Для определения $\mathbf{H}_\omega$ подставляем в формулу (71,3) вместо $\mathbf{H}$ и $\mathbf{d}$ их монохроматические составляющие, т. е. соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$. Надо, однако, помнить, что величины в правой стороне равенств (71,1)—(71,5) берутся в момент времени $t' = t - (R_0/c)$. Поэтому мы должны подставить вместо $\mathbf{d}$ выражение

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} = \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}.$$

Производя подстановку и сокращая на $e^{-i\omega t}$, найдём

$$\mathbf{H}_\omega = -ik \operatorname{rot}\left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right)$$

или

$$\mathbf{H}_\omega = ik\left[\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right]. \tag{71,6}$$

Аналогичным образом найдём из (71,4):

$$\mathbf{E}_\omega = k^2\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega\nabla)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \tag{71,7}$$

Задача

Определить поле квадрупольного и магнитно-дипольного излучений на близких расстояниях.

Решение. Предполагая, для краткости, что дипольное излучение вообще отсутствует, имеем (ср. вычисления, произведённые в § 70):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}} \frac{dV}{R} \cong -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\nabla) \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}}}{R_0} dV$$

(производим разложение по степеням $\mathbf{r}$; $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$). В противоположность тому, что мы делали в § 70, множитель $1/R_0$ нельзя выносить теперь из-под знака дифференцирования. Выносим знак дифференцирования из-под знака интеграла и переписываем формулу в тензорных обозначениях:

$$A_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_k}\int \frac{x_k j_i}{R_0} dV$$

(X_k обозначают компоненты радиус-вектора $\mathbf{R}_0$). Переходя от интеграла к сумме по зарядам, находим:

$$A_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{(\sum e v_i x_k)_{t'}}{R_0}.$$

Тем же способом, что и в § 70, это выражение разделяется на квадрупольную и магнитно-дипольную части. Соответствующие скалярные потенциалы вычисляются по векторному потенциалу подобно тому, как это делалось в § 71. В результате получаем для квадрупольного излучения:

$$A_i = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{\dot{D}_{ik}}{R_0}, \quad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{D_{ik}}{R_0},$$

а для магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\mathfrak{m}}{R_0}, \quad \varphi = 0$$

(все величины в правых сторонах равенств берутся, как обычно, в момент времени $t' = t - \frac{R_0}{c}$).

§ 72. Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим теперь заряженную частицу, движущуюся со скоростью, не являющейся малой по сравнению со скоростью света. Формулы § 67, выведенные в предположении $v \ll c$, не применимы к этому случаю непосредственно. Мы можем, однако, рассматривать частицу в той системе отсчёта, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчёта упомянутые формулы, очевидно, применимы (обращаем внимание на то, что это возможно сделать только в случае одной движущейся частицы; для системы из нескольких частиц не существует, очевидно, системы отсчёта, в которой бы все частицы одновременно покоились).

Таким образом, в указанной системе отсчёта частица излучает в течение времени dt энергию

$$d\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w_0^2 dt \tag{72,1}$$

[согласно формуле (67,9)], где w_0 — ускорение частицы в этой же системе отсчёта. Перепишем теперь эту формулу в четырёхмерном виде, в котором она будет применима в произвольной системе отсчёта. Для этого заметим, что $w_0^2 = c^4 w_k^2$, где w_k есть 4-ускорение частицы в любой системе отсчёта (см. задачу 1 § 7). Далее, вместо излучённой энергии $d\mathscr{E}$ мы должны писать теперь «излучение 4-импульса» $\frac{c}{i} dP_i$, поскольку энергия (умноженная на i/c) является временной компонентой 4-импульса; вместо dt надо по аналогичной причине писать dx_i/ic. Мы находим, таким образом:

$$dP_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 u_i ds, \tag{72,2}$$

где u_k — 4-скорость частицы. Легко проверить, что в системе отсчёта, в которой частица покоится, временная компонента этого уравнения действительно даёт (72,1); пространственные же компоненты дают для излучения импульса в единицу времени $d\mathbf{P}/dt = 0$ (при $v = 0$

пространственные компоненты u_i тоже равны нулю). Последний результат можно получить и непосредственно, определяя излучение импульса как интеграл от плотности потока импульса по замкнутой поверхности, охватывающей частицу; в системе отсчёта, в которой $v=0$, излучение определяется формулами § 67, и импульс, уносимый в противоположных направлениях, одинаков по абсолютной величине и противоположен по направлению; поэтому указанный интеграл обращается тождественно в нуль.

Полное излучение за время пролетания частицы через данное электромагнитное поле равно интегралу от выражения (72,2), т. е.

$$\Delta P_i = \frac{2e^2}{3c}\int\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i.$$

Перепишем эту формулу в другом виде, выразив 4-ускорение du_i/ds через тензор электромагнитного поля с помощью уравнений движения (22,4):

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u_l.$$

Мы получим тогда

$$\Delta P_i = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\int (F_{kl}u_l)^2 dx_i. \tag{72,3}$$

Временная компонента этого уравнения даёт полное излучение энергии $\Delta\mathscr{E}$. Подставляя для всех четырёхмерных величин их выражения через трёхмерные величины, получим

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt. \tag{72,4}$$

Аналогично, для полного излучения импульса имеем

$$\Delta\mathbf{P} = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}-\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathbf{v}\,dt. \tag{72,5}$$

Из формулы (72,4) видно, что при скоростях, близких к скорости света, полное излучение энергии в единицу времени зависит от скорости в основном как $(1-v^2/c^2)^{-1}$, т. е. пропорционально квадрату энергии движущейся частицы. Исключение представляет только движение в электрическом поле, параллельно направлению поля. В этом случае множитель $(1-v^2/c^2)$, стоящий в знаменателе, сокращается с таким же множителем в числителе, и излучение оказывается не зависящим от энергии частицы.

Наконец, остановимся на вопросе о распределении излучения быстро движущейся частицы по направлениям. Для решения этой задачи удобно воспользоваться лиенар-вихертовским выражением для поля (63,8—9). На больших расстояниях мы должны сохранить в нём только член с более низкой степенью $1/R$ [второй член в формуле (63,8)]. Вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении излучения ($\mathbf{R}=\mathbf{n}R$), имеем, следовательно, для поля, создаваемого зарядом, формулы

$$\mathbf{E}=\frac{e}{c^2R}\,\frac{\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\right]\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^3},\quad \mathbf{H}=[\mathbf{nE}], \tag{72,6}$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в запаздывающий момент времени $t'=t-\frac{R}{c}$ ($\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение частицы).

Интенсивность излучения в телесный угол do равна $dI=\frac{c}{4\pi}E^2R^2do$. Раскрывая квадрат E^2, найдём:

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^6}\right\}do. \tag{72,7}$$

Если же мы хотим определить угловое распределение полного излучения за всё время движения заряда, то надо проинтегрировать интенсивность по времени. При этом следует помнить, что интегрируемое выражение является функцией t'; поэтому надо писать

$$dt=\frac{\partial t}{\partial t'}dt'=\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)dt' \tag{72,8}$$

[см. (63,6)], после чего интегрирование производится непосредственно по dt'. Таким образом, имеем следующее выражение для полного излучения в элемент телесного угла do:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{e^2}{4\pi c^3}do\int\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^5}\right\}dt \tag{72,9}$$

(штрих у переменной интегрирования опускаем).

Задача

Определить полное излучение заряда e_1, пролетающего в кулоновом поле (с потенциалом $\varphi=e_2/r$) со скоростью порядка скорости света.

Решение. При пролетании через поле заряд почти не отклоняется. Поэтому в (72,4) можно считать скорость $\mathbf{v}$ постоянной, так что $\mathbf{E}=\frac{e_2\mathbf{r}}{r^3}=$

$=\frac{e_2\mathbf{r}}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}}$, $x=vt$, $y=\rho$ (см. задачу 4 к § 69). Интегрируя (72,4) по времени, получим в результате полное излучение

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12m^2c^3\rho^3 v}\,\frac{4-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

§ 73. Излучение заряда, движущегося равномерно по окружности

Рассмотрим подробно излучение заряда, движущегося с произвольной скоростью по окружности в однородном постоянном магнитном поле. Радиус орбиты r и циклическая частота движения ω_0 выражаются через напряжённость поля H и скорость частицы v посредством формул (см. § 20):

$$r=\frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \omega_0=\frac{v}{r}=\frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{73,1}$$

Полная интенсивность излучения по всем направлениям определяется непосредственно по формуле (72,4), в которой надо положить $\mathbf{E}=0$ и $\mathbf{H}\perp\mathbf{v}$:

$$I=\frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{73,2}$$

Мы видим, что полная интенсивность оказывается пропорциональной квадрату импульса частицы.

Если же мы интересуемся угловым распределением излучения, то надо воспользоваться формулой (72,8). Интерес представляет интенсивность, усреднённая по периоду движения. Соответственно этому будем интегрировать в (72,8) по времени обращения частицы по окружности и разделим результат на величину периода $T=2\pi/\omega_0$.

Выберем плоскость орбиты в качестве плоскости X, Y (начало координат — в центре окружности), а плоскость Y, Z проводим через направление излучения $\mathbf{n}$. Магнитное поле будет направлено по оси Z. Пусть, далее, θ есть угол между направлением излучения $\mathbf{n}$ и осью Z (полярный угол направления $\mathbf{n}$), а $\varphi=\omega_0 t$ — угол между радиус-вектором частицы и осью X. Тогда косинус угла между направлением $\mathbf{n}$ и скоростью $\mathbf{v}$ (т. е. осью X) равен $\cos(\mathbf{n},\mathbf{v})=\sin\theta\cos\varphi$ (вектор $\mathbf{v}$ лежит в плоскости XY и в каждый момент времени перпендикулярен к радиус-вектору частицы). Ускорение частицы $\dot{\mathbf{v}}$ выражаем через поле $\mathbf{H}$ и скорость $\mathbf{v}$ согласно уравнению движения [см. (19,1)]:

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,[\mathbf{vH}].$$

После простого вычисления получим:

$$\overline{dI} = do\,\frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\sin\theta\cos\varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi \qquad (73,3)$$

(интегрирование по времени заменено интегрированием по $d\varphi=\omega_0\,dt$). Процесс интегрирования элементарен, хотя выкладки довольно громоздки. В результате получается следующая формула:

$$\overline{dI} = do\,\frac{e^4H^2v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2c^5}\left[\frac{2+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{5/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(4+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{7/2}}\right]. \qquad (73,4)$$

Отношение интенсивности излучения под углом $\theta=0$ (перпендикулярно к плоскости орбиты) к интенсивности под углом $\theta=\pi/2$ (в плоскости орбиты) равно

$$\frac{(dI/do)_{\pi/2}}{(dI/do)_0}=\frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}.$$

При $v\to 0$ это отношение стремится к $1/2$, но при скоростях, близких к скорости света, оно становится очень большим. Другими словами, при движении с большой скоростью излучение сосредоточено в основном вблизи плоскости орбиты. «Ширину» $\Delta\theta$ области углов, в которой заключена основная часть излучения, легко оценить из условия $1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\sim 1-\frac{v^2}{c^2}$, написав $\theta=\frac{\pi}{2}\pm\Delta\theta$; $\sin\theta\cong 1-\frac{(\Delta\theta)^2}{2}$. Очевидно, что

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (73,5)$$

Далее, рассмотрим спектральное распределение излучения. Поскольку движение заряда периодично $\left(\text{период } T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi r}{v}\right)$, то речь идёт о разложении в ряд Фурье. Вычисление удобно начать с векторного потенциала. Для компоненты Фурье векторного потенциала имеем формулу (см. § 66):

$$\mathbf{A}_n = e\frac{e^{ikR_0}}{cR_0T}\oint e^{i(\omega_0 nt - \mathbf{kr})}d\mathbf{r},$$

где интегрирование производится вдоль траектории частицы (окружности). Для координат частицы имеем $x = r\cos\omega t$, $x = r\sin\omega t$. В качестве переменной интегрирования выбираем угол $\varphi = \omega t$. Замечая, что $dx = -r\sin\varphi\cdot d\varphi$ и что $\mathbf{kr} = kr\sin\theta\sin\varphi = \frac{nv}{c}\sin\theta\sin\varphi$ $\left(\theta\text{ — угол между направлением излучения и осью } z;\ k = \frac{n\omega_0}{c} = \frac{nv}{cr}\right)$, находим для компоненты Фурье x-составляющей векторного потенциала:

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi cR_0}e^{ikR_0}\int_0^{2\pi} e^{in\left(\varphi - \frac{v}{c}\sin\theta\sin\varphi\right)}\sin\varphi\, d\varphi.$$

С таким интегралом нам приходилось уже иметь дело в § 69. Он выражается через производную от функции Бесселя:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0}e^{ikR_0}J_n'\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right). \tag{73,6}$$

Аналогичным образом вычисляется A_{yn}:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0\sin\theta}e^{ikR_0}J_n\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right). \tag{73,7}$$

Компонента же вдоль оси Z, очевидно, вообще отсутствует.

По формулам § 66 имеем для интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в элемент телесного угла do:

$$I_n = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_n|^2R_0^2\,do = \frac{c}{2\pi}|[\mathbf{kA}_n]|^2R_0^2\,do.$$

Замечая, что

$$|[\mathbf{Ak}]|^2 = A_x^2k^2 + A_y^2k^2\cos^2\theta,$$

и подставляя выражения (73,7), получим для интенсивности излучения следующую формулу (Шотт, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2e^4H^2}{2\pi\varepsilon^8m^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\operatorname{ctg}^2\theta\cdot J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right]do. \tag{73,8}$$

Для определения полной интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ по всем направлениям это выражение должно быть проинтегрировано по всем углам. Интегрирование, однако, не может быть произведено в конечном виде. Посредством ряда преобразований, использующих некоторые соотношения теории функций Бесселя, искомый интеграл может быть приведён к следующему виду:

$$I_n = \frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2c^2v}\left[n\frac{v^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)\,d\xi\right] \tag{73,9}$$

Рассмотрим более подробно спектральное распределение излучения в том случае, когда скорость движения частицы близка к скорости света (Л. Арцимович и И. Померанчук, 1945). Мы увидим ниже, что в этом случае основную роль в излучении играют частоты с большими n. В связи с этим надо выяснить асимптотический вид функции Бесселя $J_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right)$ при больших n $\left(\text{и близких к единице } \frac{v}{c}\right)$. Написав функцию Бесселя в интегральном виде:

$$J_{2n}(2n\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{2in(\varphi - \xi\sin\varphi)}\,d\varphi,$$

замечаем, что в рассматриваемом случае в интеграле основную роль играют малые значения переменной интегрирования φ (так как при больших φ подинтегральное выражение будет быстро осциллирующей функцией). Соответственно этому разлагаем экспоненту подинтегрального выражения по степеням φ:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2in\left[(1-\xi)\varphi + \frac{\varphi^3}{6}\right]}\,d\varphi$$

[интегрирование может быть распространено на всю область от $-\infty$ до $+\infty$, так как интеграл быстро сходится; член третьего порядка должен быть сохранён, так как в интересующем нас случае $(1-\xi)$ мало и, следовательно, линейный член мал]. Но получившийся интеграл непосредственно приводится к функции Эйри (см. примечание на стр. 170). Таким образом, получаем следующее асимптотическое выражение для функции Бесселя:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{n^{1/3}\sqrt{\pi}}\,\Phi\left[2n^{2/3}(1-\xi)\right]. \tag{73,10}$$

Подставляя выражение (73,10) в (73,9), получим следующую формулу для спектрального распределения излучения при больших значениях n [1]):

$$I_n = -\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3}}{\sqrt{\pi}\, m^2c^3}\left\{\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int\limits_u^\infty \Phi(u)\,du\right\}, \qquad (73,11)$$

$$u = n^{2/3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

При $u \to 0$ стоящее в фигурных скобках выражение стремится к постоянному пределу $\Phi'(0) = -0,4587\ldots$ Поэтому при $u \ll 1$ имеем:

$$I_n = 0,52\,\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3}, \quad 1 \ll n \ll \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}, \qquad (73,12)$$

т. е. интенсивность n-й гармоники пропорциональна $n^{1/3}$. При $u \gg 1$ можно воспользоваться известным асимптотическим выражением функции Эйри (см. примечание на стр. 170) и получим:

$$I_n = \frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\, m^2c^3}\exp\left\{-\frac{2}{3}n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\right\}, \qquad (73,13)$$

$$n \gg \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2},$$

т. е. интенсивность экспоненциально падает при очень больших n. Спектральное распределение имеет, следовательно, максимум при $n \sim \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$, и основная часть излучения сосредоточена в области частот, в которой

$$\omega \sim \omega_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} = \frac{eH}{mc}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \qquad (73,14)$$

Поскольку эти значения ω очень велики, а расстояние между двумя соседними частотами равно ω_0 (которое сравнительно мало), то мы можем сказать, что спектр излучения имеет «квазинепрерывный» характер, состоя из очень большого числа близко расположенных линий.

Задачи

1. Найти асимптотическую формулу для спектрального распределения излучения при больших n для частицы, движущейся по окружности со скоростью, не близкой к скорости света.

---

[1]) При подстановке верхний предел интеграла, $(2n^{2/3})$, заменён бесконечностью (поскольку n велико), а нижний, $2\left(1-\frac{v}{c}\right)$, заменён на $1-\frac{v^2}{c^2}$ (ввиду того, что $v \cong c$). Кроме того, в коэффициенте перед фигурной скобкой v заменено на c.

Решение. С помощью асимптотического выражения функции Бесселя, приведённой в примечании на стр. 210, находим из (73,9):

$$I_n = \frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4} n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\, m^2c^3}\left(\frac{v/c}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, e^{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^{2n}.$$

Эта формула применима, если $n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \gg 1$; если к тому же $1-\frac{v^2}{c^2}$ мало, то полученная формула переходит в формулу (73,13).

2. Определить закон изменения энергии со временем для заряда, движущегося по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле и теряющего энергию путём излучения.

Решение. Согласно (73,2) имеем для потери энергии в единицу времени

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^4H^2}{3m^4c^7}(\mathscr{E}^2 - m^2c^4)$$

($\mathscr{E}$ — энергия частицы). Отсюда находим:

$$\operatorname{arg\,th}\frac{\mathscr{E}}{mc^2} - \operatorname{arg\,th}\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2} = \frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t,$$

где $\mathscr{E}$ — энергия частицы в начальный момент времени ($t=0$). Мы видим, что энергия падает, приближаясь к значению $\mathscr{E}=mc^2$ (полная остановка частицы) асимптотически при $t\to\infty$.

§ 74. Торможение излучением

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов. Произведём теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены.

В разложении скалярного потенциала

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}\, dV$$

член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\, dV \qquad (74,1)$$

[первых членов разложения (см. § 65) мы здесь для краткости писать не будем]. По тем же причинам, что и при выводе (65,3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т. е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\,dV. \tag{74,2}$$

Произведём преобразование потенциалов:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$ обратился в нуль. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\,dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\,dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\,dV =$$
$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\,dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho\,dV.$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, для первого слагаемого в правой части получим выражение $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл (см. § 66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает следующий вид: $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \tag{74,3}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0$), поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат. Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \tag{74,4}$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению некоторых дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65,6); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение[1]) и вычислим среднюю работу, производимую полем (74,4) за

---

[1]) Точнее, — движение, которое было бы стационарным при пренебрежении излучением, приводящим к постепенному затуханию движения.

единицу времени. На каждый заряд e действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\,. \tag{74,5}$$

В единицу времени эта сила производит работу, равную $\mathbf{fv}$, так что полная работа, совершённая над всеми зарядами, равна сумме, взятой по зарядам:

$$\sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении по времени первый член исчезает, так что средняя работа оказывается равной

$$\overline{\sum \mathbf{fv}} = -\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{74,6}$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятое с обратным знаком) среднее излучение энергии, производимое системой за единицу времени [см. (67,9)]. Таким образом, возникающие в третьем приближении силы (74,5) описывают обратное действие излучения на заряды. Эти силы носят название торможения излучением или лоренцевых сил трения.

Одновременно с потерей энергии в излучающей системе зарядов происходит также и некоторая потеря момента количества движения. Уменьшение момента количества движения в единицу времени, $d\mathbf{M}/dt$, легко вычислить с помощью выражений для сил торможения. Дифференцируя момент количества движения $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$ по времени, имеем $\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$, так как $\sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \sum m\,[\mathbf{vv}] \equiv 0$. Производную по времени от импульса частицы заменяем действующей на неё силой трения (74,4) и находим

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{rf}] = \frac{2}{3c^3}\sum e\,[\mathbf{r}\dddot{\mathbf{d}}] = \frac{2}{3c^3}[\mathbf{d}\dddot{\mathbf{d}}].$$

Нас интересует среднее по времени значение потери момента количества движения при стационарном движении, подобно тому как выше нас интересовала средняя потеря энергии. Написав

$$[\mathbf{d}\dddot{\mathbf{d}}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}] - [\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}]$$

и замечая, что полная производная по времени (первый член) при усреднении исчезает, найдём окончательно следующее выражение для средней потери момента количества движения излучающей системой:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}]. \tag{74,7}$$

Торможение излучением имеет место и при наличии одного движущегося во внешнем поле заряда. Оно равно

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{74,8}$$

Для одного заряда можно всегда выбрать такую систему отсчёта, в которой он в данный момент времени покоится в начале координат. Если вычислять в такой системе дальнейшие члены разложения поля, создаваемого зарядом, то оказывается, что они обладают следующим свойством. При стремлении к нулю радиус-вектора от заряда к точке наблюдения эти члены оказываются функциями направления радиус-вектора, причём такими, которые обращаются в нуль при усреднении по всем направлениям. Другими словами, усреднённые таким способом высшие члены разложения силы действия заряда «самого на себя» обращаются в нуль. Таким образом, в случае одного заряда формула (74,8) является в некотором смысле точной формулой для обратного действия излучения в той системе отсчёта, в которой заряд покоится.

Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия. Уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (74,8), имеет вид:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Это уравнение имеет, кроме тривиального решения $\mathbf{v} = \text{const.}$, ещё решение, при котором ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционально $e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}$, т. е. неограниченно возрастает со временем. Это, значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться». Абсурдность этого результата и свидетельствует об ограниченной применимости формулы (74,8).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся, в действительности, в упоминавшейся выше (§ 36) бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим, по существу, приписываем ему формально бесконечную же отрицательную «собственную массу» не электромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Поскольку, однако, вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне корректной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь.

В системе координат, в которой скорость частицы мала, уравнение движения с учётом торможения излучением имеет вид:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{74,9}$$

По изложенным соображениям, это уравнение применимо только постольку, поскольку сила торможения мала по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля.

Для выяснения физического смысла этого условия поступим следующим образом. В системе отсчёта, в которой заряд в данный момент покоится, вторая производная от скорости по времени равна, при пренебрежении силой торможения:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}].$$

Во втором члене подставляем (ограничиваясь той же точностью) $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$ и получаем:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}[\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Соответственно этому сила торможения будет состоять из двух членов:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}\mathbf{H}]. \tag{74,10}$$

Если ω есть частота движения, то $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционально $\omega\mathbf{E}$ и, следовательно, первый член порядка величины $\frac{e^3\omega}{mc^3}\mathbf{E}$; второй же — порядка $\frac{e^4}{m^2c^4}EH$. Поэтому условие малости сил торможения по сравнению с действующей на заряд внешней силой $e\mathbf{E}$ даёт, во-первых,

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \tag{74,11}$$

Таким образом, формула (72,8) для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2. Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см. § 36).

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения с силой $e\mathbf{E}$, находим условие

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}. \tag{74,12}$$

Таким образом, необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико. Поля порядка m^2c^4/e^3 тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям. И здесь надо иметь в виду, что в действительности электродинамика становится неприменимой, благодаря квантовым эффектам, уже при значительно меньших полях[1]).

Выведем релятивистское выражение для торможения излучением (для одного заряда), применимое и для движения со скоростями порядка скорости света. Эта сила будет теперь 4-вектором f_i, которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырёхмерном виде:

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k + f_i. \tag{74,13}$$

Для определения f_i заметим, что при $v \ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора $\mathbf{f}/c$ (74,8). Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}$. Он, однако, не удовлетворяет тождеству $f_iu_i = 0$, которое имеет место для компонент всякого 4-вектора силы. Для того чтобы удовлетворить этому условию, надо прибавить к написанному выражению некоторый дополнительный 4-вектор, составленный из 4-скорости u_i и её производных. Три пространственные компоненты этого вектора должны обращаться в предельном случае $\mathbf{v} = 0$ в нуль так, чтобы не изменить правильного значения f_i, которое даётся уже выражением $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}$. Этим свойством обладает 4-вектор u_i, и потому искомый дополнительный член должен иметь вид αu_i. Скаляр α надо выбрать так, чтобы удовлетворить соотношению $f_iu_i = 0$. В результате находим

$$f_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} + u_iu_k\frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \tag{74,14}$$

Полученную формулу можно переписать в другом виде, согласно уравнениям движения, выразив производные $\frac{d^2u_i}{ds^2}$ непосредственно через тензор действующего на частицу внешнего электромагнитного поля:

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{mc^2}F_{ik}u_k,$$

$$\frac{d^2u_i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}u_ku_l + \frac{e^2}{m^2c^4}F_{ik}F_{kl}u_l.$$

---

[1]) При полях порядка $m^2c^3/\hbar e$, где $\hbar$ — постоянная Планка.

При подстановке надо иметь в виду, что произведение антисимметричного по индексам i, k тензора $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}$ на симметричный тензор $u_i u_k$ даёт в результате тождественно нуль. Итак,

$$f_i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}u_k u_l - \frac{2e^4}{3m^2c^4}F_{il}F_{kl}u_k - \frac{2e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}u_l)^2 u_i. \qquad (74,15)$$

Интеграл от 4-силы f_i, взятый по мировой линии движения заряда, пролетающего через заданное поле, должен совпасть (с обратным знаком) с полным излучением зарядом 4-импульса ΔP_i, определяемым формулой (72,3) [подобно тому как среднее значение работы силы **f** в нерелятивистском случае совпадает с интенсивностью дипольного излучения — см. (74,6)]. Легко убедиться в том, что это действительно имеет место. Первые два члена в (74,15) совпадают с первым членом в (74,14) $\left(\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}\right)$ и при интегрировании обращаются в нуль, так как на бесконечности частица не имеет ускорения, т. е. $\frac{du_i}{ds} = 0$. Третий же член даёт

$$-\int f_i ds = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\int (F_{kl}u_l)^2 u_i ds,$$

что в точности совпадает с (72,3).

Если скорость частицы приближается к скорости света («ультрарелятивистский» случай), то из трёх членов в формуле (74,15) наиболее быстро возрастает третий, содержащий тройные произведения компонент 4-скорости $\left(\text{напомним, что компоненты 4-скорости содержат в знаменателе } \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$. Поэтому при v/c, достаточно близком к единице, можно написать:

$$f_i = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}u_l)^2 u_i. \qquad (74,16)$$

Пространственные компоненты дают для силы торможения выражение:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (74,17)$$

Здесь ось X выбрана вдоль направления скорости **v** и везде, где возможно, положено $v = c$. Мы видим, что для ультрарелятивистской частицы торможение излучением пропорционально квадрату её энергии.

Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство. Выше было показано, что полученные выражения для торможения излучением применимы лишь в полях, малых (в системе отсчёта K_0, в которой частица покоится) по сравнению с m^2c^4/e^3. Пусть F есть порядок величины поперечного (к направлению движения) поля в системе отсчёта K, в которой частица движется со скоростью v [поле, которое входит в формулу (74,17)]. Тогда в системе K_0 поле имеет порядок величины $F/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (см. формулы преобразования в § 23). Поэтому F должно удовлетворять условию

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ll 1. \tag{74,18}$$

Между тем, сила торможения (74,17) имеет порядок величины

$$f \sim \frac{e^4F^2}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

и мы видим, что условие (74,18) может выполняться [при достаточно малом $1-(v^2/c^2)$], даже если сама сила торможения f велика по сравнению с обычной лоренцовой силой, действующей на заряд в электромагнитном поле ($f \gg eF$). Таким образом, для ультрарелятивистской частицы может иметь место случай, когда торможение излучением (74,17) является основной действующей на него силой.

В этом случае потерю энергии (кинетической) частицей на единице длины её пути $\left(-\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx}\right)$ можно считать равной одной только силе торможения f_x; имея в виду, что последняя пропорциональна квадрату энергии частицы, напишем:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx} = -g(x)\,\mathscr{E}^2_{\text{кин}},$$

где посредством $g(x)$ обозначен зависящий от координаты x коэффициент, выражающийся согласно (74,17) через поперечные компоненты поля. Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдём:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кин}}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{x} g(x)\,dx,$$

где посредством $\mathscr{E}_0$ обозначена начальная энергия частицы (энергия при $x \to -\infty$). В частности, конечная энергия частицы $\mathscr{E}_1$ (после пролетания частицы через поле) определяется формулой

$$\frac{1}{\mathscr{E}_1} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Мы видим, что при $\mathscr{E}_0 \to \infty$ конечная энергия $\mathscr{E}_1$ стремится к постоянному, не зависящему от $\mathscr{E}_0$ пределу (И. Померанчук, 1939). Другими словами, после пролетания через поле энергия частицы не может превышать значения $\mathscr{E}_{\text{кр}}$, определяемого равенством

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx$$

или, подставляя выражение для $g(x)$,

$$\mathscr{E}_{\text{кр}}^{-1} = \frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]\, dx. \qquad (74,19)$$

Задачи

1. Определить время, в течение которого два притягивающихся заряда совершающих эллиптическое движение (со скоростью, малой по сравнению со скоростью света) и теряющие энергию благодаря излучению, «упадут» друг на друга.

Решение. Средняя потеря энергии частицами за единицу времени равна (см. задачу 1, § 69):

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dt} = \frac{(2|\mathscr{E}|)^{3/2}\mu^{5/2}|e_1e_2|^3}{c^3M^5}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(1 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{3\mu e_1^2e_2^2}\right) \qquad (1)$$

(напоминаем, что при эллиптическом движении $|\mathscr{E}| < 0$, так что $\frac{d|\mathscr{E}|}{dt} > 0$); потерю энергии за один оборот мы предполагаем малой, что даёт возможность пользоваться её усреднённым значением. Наряду с энергией частицы теряют момент количества движения. Потеря момента в единицу времени даётся формулой (74,7); подставляя в неё выражение (69,1) для $\mathbf{d}$ и замечая, что $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{|e_1e_2|\mathbf{r}}{r^3}$ и $\mathbf{M} = \mu[\mathbf{rv}]$, находим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2|e_1e_2|}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Это выражение усредняем по периоду движения; среднее значение от r^{-3} вычисляется точно так, как вычислялось в задаче 1 § 69 среднее значение от r^{-4}. В результате находим для средней потери момента в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2|e_1e_2|(2\mu|\mathscr{E}|)^{3/2}}{3c^3M^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \qquad (2)$$

[знак среднего, как и в (1), опускаем]. Разделив (1) на (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dM} = -\frac{\mu e_1^2e_2^2}{2M^3}\left(3 - 2\frac{|\mathscr{E}|M^2}{\mu e_1^2e_2^2}\right),$$

интегрируя которое, найдём:

$$|\mathscr{E}| = \frac{\mu e_1^2 e_2^2}{2M^2}\left(1 - \frac{M^3}{M_0^3}\right) + \frac{|\mathscr{E}_0|}{M_0} M. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы при $M = M_0$ было $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$, где M_0 и $\mathscr{E}_0$ — начальные значения момента и энергии частиц.

«Падению» частиц друг на друга соответствует $M \to 0$. Из (3) видно, что при этом, как и следовало, $\mathscr{E} \to -\infty$. Заметим, что произведение $|\mathscr{E}| M^2$ стремится к $\frac{1}{2}\mu e_1^2 e_2^2$ и из формулы (69,3) видно, что эксцентриситет $\varepsilon \to 0$, т. е. по мере сближения частиц орбита приближается к окружности. Подставляя (3) в (2), определяем производную $\frac{dt}{dM}$, выраженную как функция от M, после чего интегрирование по dM в пределах от M_0 до 0 непосредственно даёт время падения:

$$t_{\text{пад}} = \frac{c^3 M_0^5}{\sqrt{2\mu |\mathscr{E}_0| \mu e_1^2 e_2^2}} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^{-2} \left(\sqrt{\mu e_1^2 e_2^2} + \sqrt{2M_0^2 |\mathscr{E}_0|}\right)^{-2}.$$

2. Определить предельную энергию, которой может обладать частица после пролетания через поле магнитного диполя $\mathfrak{m}$; вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения лежат в одной плоскости.

Решение. Выбираем плоскость, проходящую через вектор $\mathfrak{m}$, и направление движения в качестве плоскости XZ, причём частица движется параллельно оси X на расстоянии ρ от неё. Для поперечных компонент поля магнитного диполя имеем [см. (43,4)]:

$$H_y = 0, \quad H_z = \frac{3(\mathfrak{m}\mathbf{r})z - \mathfrak{m}_z r^2}{r^5} =$$

$$= \frac{\mathfrak{m}}{(\rho^2 + x^2)^{5/2}} \{3(\rho\cos\varphi + x\sin\varphi)\rho - (\rho^2 + x^2)\cos\varphi\}$$

(φ — угол между $\mathfrak{m}$ и осью z). Подставляя в (74,19) и производя интегрирование, получим:

$$\mathscr{E}_{\text{кр}}^{-1} = \frac{\mathfrak{m}^2\pi}{2m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left\{\frac{41}{32} - \frac{39}{16}\sin^2\varphi + \frac{5}{3}\sin\varphi\cos\varphi\right\}.$$

3. Написать трёхмерное выражение для силы торможения в релятивистском случае.

Решение. Вычисляя пространственные компоненты 4-вектора (74,15), получим:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{[\mathbf{E}\mathbf{H}] + \frac{1}{c}[\mathbf{H}[\mathbf{H}\mathbf{v}]] + \frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{v}\mathbf{E})\right\} +$$

$$+ \frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\mathbf{v})^2\right\}.$$

§ 75. Спектральное разложение излучения в ультрарелятивистском случае

Угловое распределение излучения частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света («ультрарелятивистский» случай) обладает характерной особенностью, которую можно обнаружить непосредственно из общего выражения (72,7) для интенсивности излучения. В знаменатели различных членов этого выражения входят высокие степени разности $\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)$. Если v близко к c $\left(\text{т. е. } 1-\frac{v}{c}\ll 1\right)$, то интенсивность будет иметь резкий максимум в узком интервале углов, в котором $\mathbf{vn}\cong v$, т. е. $\mathbf{n}$ направлено почти параллельно $\mathbf{v}$. Таким образом, ультрарелятивистская частица излучает в основном в направлении своего движения.

Легко оценить интервал углов $\Delta\theta$ вокруг направления $\mathbf{v}$, в котором интенсивность излучения заметно отлична от нуля. Написав

$$1-\frac{\mathbf{vn}}{c}=1-\frac{v}{c}\cos\theta\cong 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2},$$

найдём, что эта разность мала (порядка $1-v/c$) в интервале $\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v}{c}}$, или, что то же:

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{75,1}$$

Для вычисления спектрального разложения излучения существенно взаимоотношение между величиной интервала углов $\Delta\theta$ и полным углом отклонения α частицы при пролетании через внешнее электромагнитное поле. Угол α может быть оценён следующим образом. Поперечное (к направлению движения) изменение импульса частицы порядка величины произведения поперечной силы eF[1]) на время пролетания через поле $t\sim\frac{a}{v}\cong\frac{a}{c}$ (где a — расстояние, на котором поле заметно отлично от нуля).

Отношение этой величины к импульсу $p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cong\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ и определит порядок величины угла α (абсолютное значение угла отклонения α для ультрарелятивистской частицы предполагается малым). Таким образом,

$$\alpha\sim\frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

---

[1]) Если выбрать ось x вдоль направления движения частицы, то $(eF)^2$ есть сумма квадратов y- и z-составляющих лоренцовой силы, $e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$, в которой можно при этом положить $v\cong c$:

$$F^2=(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2.$$

Отношение $\alpha/\Delta\theta$, следовательно, имеет порядок величины

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}.$$

Обратим внимание на то, что оно не зависит от скорости частицы и целиком определяется свойствами самого внешнего поля.

Предположим сначала, что

$$eFa \gg mc^2, \tag{75,2}$$

т. е. полный угол отклонения частицы велик по сравнению с $\Delta\theta$. Тогда мы можем утверждать, что излучение в заданном направлении происходит в основном с того участка траектории, на котором скорость частицы почти параллельна этому направлению (образует с ним угол в интервале $\Delta\theta$), и длина этого участка мала по сравнению с a. На таком участке поле F можно считать постоянным, и поскольку малый участок кривой можно рассматривать как отрезок окружности, то мы можем применить результаты, полученные в § 73 для излучения при равномерном движении по окружности (заменив при этом H на F). В частности, можно утверждать, что основная часть излучения будет сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{75,3}$$

[см. (73,14)]. Более подробное вычисление спектрального разложения — см. задачу 1 к этому параграфу.

В обратном предельном случае,

$$eFa \ll mc^2, \tag{75,4}$$

полный угол отклонения частицы мал по сравнению с $\Delta\theta$. В этом случае всё излучение направлено в основном в узком интервале углов $\Delta\theta$ вокруг направления движения, причём в данную точку приходит излучение со всей траектории. Для определения спектрального разложения излучения в этом случае воспользуемся лиенар-вихертовским выражением (72,6) для поля в волновой зоне и вычислим его компоненту Фурье. Для этого надо проинтегрировать $\mathbf{E}e^{i\omega t}$ по dt. Но выражение (72,6) есть функция от $t-\frac{R}{c} \cong t-\frac{R_0}{c}-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} = t'-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}$ (здесь $\mathbf{r}'=\mathbf{r}(t') \cong \mathbf{v}t'$ — радиус-вектор частицы). Поэтому удобно перейти от интегрирования по dt к интегрированию по dt', написав

$$dt = \left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)dt'$$

[см. (72,8)] и

$$e^{i\omega t} = e^{i\omega\left(t'-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}\right)} = e^{i\omega t'\left(1-\frac{\mathbf{v}\mathbf{n}}{c}\right)}.$$

В результате получим:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{2\pi c^2 R_0}\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^{-2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}(t)\right]\right]e^{i\omega t\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)}dt \quad (75,5)$$

(штрих у переменной интегрирования опускаем). Скорость $\mathbf{v}$ рассматриваем везде как постоянную величину (учитывая тем самым малость отклонения частицы в данном случае); переменным является лишь ускорение $\mathbf{w}(t)$.

Оценку порядка величины частот, в области которых сосредоточена основная часть излучения, можно произвести следующим образом. Период экспоненциального множителя в подинтегральном выражении в (75,5) порядка величины

$$\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{v}{c}\right)^{-1} \cong \frac{2}{\omega}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

Интеграл будет заметно отличен от нуля, если этот период будет того же порядка, что и время T, в течение которого ускорение $w(t)$ частицы меняется заметным образом. Очевидно, что $T \sim \frac{a}{v} \cong \frac{a}{c}$ (a — расстояние, на котором поле заметно отлично от нуля). Поэтому находим:

$$\omega \sim \frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (75,6)$$

Зависимость этих частот от энергии частицы такая же, как и в (75,3), но коэффициент — другой.

Более подробное исследование интеграла (75,5) — см. задачу 2 к этому параграфу.

Задачи

1. Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) интенсивности излучения при условии (75,2).

Решение. С каждого элемента длины траектории излучение определяется формулой (73,11), в которой надо заменить H на значение F поперечной силы в данной точке и, кроме того, надо перейти от дискретного спектра частот к непрерывному. Этот переход осуществляется формальным умножением на dn и заменой

$$I_n\,dn = I_n\frac{dn}{d\omega}\,d\omega = I_n\frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Интегрируя затем интенсивность по всему времени, найдём спектральное распределение полного излучения в следующем виде:

$$d\mathscr{E}_\omega = -d\omega\frac{2e\,\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\pi}\,c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{u}\Phi'(u)+\frac{1}{2}\int\limits_{u}^{\infty}\Phi(u)\,du\right]dt,$$

где $\Phi(u)$ — функция Эйри от аргумента

$$u=\left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}.$$

Подинтегральное выражение зависит от переменной интегрирования t неявным образом через величину u (F, а с ним и u, меняются вдоль траектории частицы; при заданном движении это изменение можно рассматривать как зависимость от времени).

2. То же при условии (75,4).

Решение. Имея в виду, что основную роль играет излучение под малыми углами θ к направлению движения, пишем:

$$1-\frac{\mathbf{vn}}{c}=1-\frac{v}{c}\cos\theta\cong 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\cong\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

Вводя также вектор $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{v}$ (с абсолютной величиной θ), перепишем с точностью до членов высшего порядка, выражение (75,5) в виде:

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{2e}{\pi c^2R_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)^{-2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{\omega t}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)}\left\{(\mathbf{w}\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\theta}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)\mathbf{w}\right\}dt$$

или, вводя обозначение $\omega'=\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)$,

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{c^2R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\left\{(\mathbf{w}_{\omega'}\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\theta}-\frac{\omega'}{\omega}\mathbf{w}_{\omega'}\right\},$$

где $\mathbf{w}_\omega$ — компонента Фурье ускорения. Это выражение подставляем в формулу (66,9) $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=cR_0^2|\mathbf{E}_\omega|^2do\,d\omega$ и интегрируем по всем направлениям (написав $do=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\cong\theta\,d\theta\,d\varphi$). В результате получим для спектрального разложения полного излучения следующую формулу:

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{2\pi e^2}{c^3\omega}\int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty}|\mathbf{w}_{\omega'}|^2\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]d\omega'.$$

§ 76. Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под её влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит, как говорят, рассеяние первоначальной волны.

Рассеяние удобнее всего характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени, к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет, очевидно, размерность площади и называется эффективным сечением рассеяния.

Пусть dI есть энергия, излучаемая системой в телесный угол do (в 1 сек.) при падении на неё волны с вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Тогда эффективное сечение рассеяния (в телесный угол do) равно

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{76,1}$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл σ от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное эффективное сечение рассеяния.

Рассмотрим рассеяние, производимое одним неподвижным свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Её электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Мы будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда можно считать, что сила, действующая на заряд, равна $e\mathbf{E}$, а силой $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него всё время действует то поле, которое имеется в начале координат, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, то

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{76,2}$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой (67,8) для дипольного излучения (мы имеем право сделать это, поскольку скорость, приобретаемая зарядом под влиянием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света). Заметим также, что частота излучаемой зарядом (т. е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны.

Подставляя (76,2) в (67,7), находим

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\mathbf{En}]^2 do.$$

С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны равен

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Отсюда мы находим эффективное сечение рассеяния в телесный угол do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{76,3}$$

где θ — угол между направлением рассеяния (вектором $\mathbf{n}$) и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ падающей волны. Мы видим, что эффективное сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты.

Определим полное эффективное сечение σ. Для этого выберем сферические координаты с началом в месте нахождения заряда и полярной осью вдоль $\mathbf{E}$. Тогда $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$; подставляя это и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π и по $d\varphi$ от 0 до 2π, находим

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{76,4}$$

Наконец, вычислим эффективное сечение $d\sigma$ в случае, когда падающая волна не поляризована (естественный свет). Для этого мы должны усреднить (76,3) по всем направлениям вектора $\mathbf{E}$ в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны (направлению волнового вектора $\mathbf{k}$). Выберем систему координат с осью Z вдоль направления $\mathbf{k}$ и осью X вдоль направления $\mathbf{E}$. Тогда косинус угла θ между направлениями $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$, т. е. проекция единичного вектора $\mathbf{n}$ на ось Z, равен $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$, где ϑ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$. Усреднение по всем направлениям $\mathbf{E}$ в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$, эквивалентно усреднению по азимуту φ. Имеем

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta}{2}$$

и, подставляя в (76,3), находим для эффективного сечения рассеяния неполяризованной волны свободным зарядом

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\, do, \tag{76,5}$$

где ϑ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн.

Наличие рассеяния приводит, в частности, к появлению некоторой силы, действующей на рассеивающую частицу. В этом легко убедиться из следующих соображений. Падающая на частицу волна теряет в единицу времени в среднем энергию $c\overline{W}\sigma$, где $\overline{W}$ — средняя плотность энергии, а σ — полное эффективное сечение рассеяния. Поскольку импульс поля равен его энергии, делённой на скорость света, то падающая волна теряет при этом импульс, равный по величине $\overline{W}\sigma$. С другой стороны, в системе отсчёта, в которой заряд совершает лишь малые колебания под влиянием силы $e\mathbf{E}$, и его скорость v поэтому мала, полный поток импульса в рассеянной волне равен, с точностью до членов высшего порядка по v/c, нулю (в § 71 было указано, что в системе отсчёта, в которой $v=0$, излучения импульса частицей не происходит). Поэтому весь теряемый падающей волной импульс «поглощается» рассеивающей частицей. Средняя действующая на частицу сила $\overline{\mathbf{f}}$ равна средней величине поглощаемого в единицу времени импульса, т. е.

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma\overline{W}\mathbf{n}_0 \tag{76,6}$$

($\mathbf{n}_0$ — единичный вектор в направлении распространения падающей волны). Отметим, что средняя сила оказывается величиной второго порядка по отношению к полю падающей волны, в то время как «мгновенная» сила (главная часть которой есть $e\mathbf{E}$) — первого порядка по отношению к полю.

Формулу (76,6) можно получить и непосредственно, усредняя силу торможения (74,10). Первый член, пропорциональный $\dot{\mathbf{E}}$, при усреднении обращается в нуль (как и среднее значение основной силы $e\mathbf{E}$). Второй же член даёт

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\overline{E^2}\mathbf{n}_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{\overline{E^2}}{4\pi}\mathbf{n}_0,$$

что ввиду (76,4) совпадает с (76,6).

Задачи

1. Определить эффективное сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом.

Решение. Поле волны имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t+\alpha) + \mathbf{B}\sin(\omega t+\alpha)$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — взаимно перпендикулярные векторы (см. § 48). Аналогично выводу, проделанному в тексте, находим

$$d\sigma = \frac{e^4}{4\pi m^2c^3}\,\frac{[\mathbf{A}\mathbf{n}]^2+[\mathbf{B}\mathbf{n}]^2}{A^2+B^2}\,do.$$

2. Определить эффективное сечение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания (так называемым осциллятором).

Решение. Уравнение движения заряда в падающей на него волне $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha)$ есть

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha),$$

где ω_0 — частота его свободных колебаний. Для вынужденных колебаний имеем отсюда

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Определяя отсюда $\ddot{\mathbf{d}}$, находим

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin^2\theta\,do$$

(θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$).

3. Определить степень деполяризации (см. § 50) при рассеянии неполяризованного света свободным зарядом.

Решение. Из соображений симметрии очевидно, что обе главные составляющие рассеянного света будут плоско поляризованы — одна в плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи, а другая — перпендикулярно к ней. Выберем ось Y в указанной плоскости. Тогда для первой поляризации находим $E = \text{const.}\, E_y \cos\vartheta$, а для второй $E = \text{const.}\ E_z$. Возводя в квадрат, усредняя и образуя отношение, получаем (поскольку для неполяризованного света $\overline{E_y^2} = \overline{E_z^2}$):

$$\rho = \cos^2\vartheta$$

(ϑ — угол между направлениями падающего и рассеянного света).

4. Определить частоту света, рассеянного движущимся зарядом.

Решение. В системе координат, где заряд покоится, частота света при рассеянии не меняется ($\omega = \omega'$). В инвариантной форме это соотношение можно написать в виде

$$k_i' u_i = k_i u_i,$$

где u_i — 4-скорость заряда. Отсюда без труда получаем

$$\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

где θ и θ' — углы, составляемые падающей и рассеянной волной с направлением движения (v — скорость заряда).

5. Определить угловое распределение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, движущимся со скоростью v в направлении распространения волны.

Решение. Интенсивность рассеяния определяется формулой (72,7) в которой ускорение частицы $\dot{\mathbf{v}}$ надо выразить через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ падающей волны согласно формуле, полученной в задаче к § 15; при этом надо иметь в виду, что $\mathbf{v}$ перпендикулярно к $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Разделив интенсивность dI на вектор Пойнтинга падающей волны, найдём следующее выражение для эффективного сечения рассеяния:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^6} \left[\left(1 - \frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\right],$$

где θ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$ относительно системы координат с осью Z вдоль направления $\mathbf{E}$ и осью X вдоль $\mathbf{v}$ ($\cos(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \cos\theta$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \sin\theta\cos\varphi$).

6. Определить движение заряда под влиянием действующей на него со стороны рассеиваемой им волны средней силы.

Решение. Сила (76,6), а потому и скорость рассматриваемого движения направлены вдоль распространения падающей волны (ось X). Во вспомогательной системе отсчёта K_0, в которой заряд покоится (напоминаем, что речь идёт о движении, усреднённом по периоду малых колебаний), действующая на него сила равна согласно (76,6) $\sigma \overline{W_0}$, а приобретаемое им под влиянием этой силы ускорение

$$w_0 = \frac{\sigma}{m}\overline{W_0}$$

(индекс нуль относится к системе отсчёта K_0). Ускорение же w и плотность энергии W волны в исходной системе отсчёта K (в которой заряд движется со скоростью v) связаны с w_0 и W_0 формулой, полученной в задаче к § 7, и формулой (46,12). Производя это преобразование, находим

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}=\frac{\overline{W}\sigma}{m}\,\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{\overline{W}\sigma}{m}t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}-\frac{2}{3},$$

чем и определяется в неявном виде скорость $v=\frac{dx}{dt}$ как функция времени (постоянная интегрирования выбрана таким образом, что $v=0$ в момент времени $t=0$).

7. Определить среднюю силу, действующую на заряд, движущийся в электромагнитном поле, представляющем собой наложение волн со всеми возможными, изотропно распределёнными направлениями распространения.

Решение. Пишем уравнения движения заряда в четырёхмерном виде

$$mc\frac{du_i}{ds}=f_i.$$

Для определения 4-вектора f_i замечаем, что в системе отсчёта, в которой заряд в данный момент покоится, при наличии всего одной волны, распространяющейся в определённом направлении (скажем, вдоль оси X), уравнение движения есть ($v_x\equiv v$):

$$m\frac{dv}{dt}=\sigma W$$

(знак среднего везде опускаем). Это значит, что X-компонента вектора f_i должна перейти в $\frac{W}{c}\sigma$. Таким свойством обладает 4-вектор $-\frac{\sigma}{c}T_{ik}u_k$, где T_{ik} — тензор энергии-импульса волны, а u_i — 4-скорость заряда. Далее, f_i должно удовлетворять условию $f_iu_i=0$. Это может быть достигнуто прибавлением к написанному выражению 4-вектора вида αu_i, где α — скаляр. Определяя α соответствующим образом [ср. формулу (74,13)], получим

$$mc\frac{du_i}{ds}=-\frac{\sigma}{c}(T_{ik}u_k+u_iu_ku_lT_{kl}). \qquad (1)$$

В электромагнитном поле изотропного излучения вектор Пойтинга исчезает в силу симметрии, а тензор напряжений $T_{\alpha\beta}$ должен иметь вид const. $\delta_{\alpha\beta}$. Замечая также, что должно быть $T_{ii}=0$, находим для компонент T_{ik}

$$T_{\alpha\beta}=\frac{W}{3}\delta_{\alpha\beta},\quad T_{\alpha4}=0,\quad T_{44}=-W.$$

Подставляя эти выражения в (1), получим для действующей на заряд силы:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{4W\sigma v}{3c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Эта сила действует в направлении, противоположном движению заряда, т. е. заряд испытывает торможение. Отметим, что при $v \ll c$ сила торможения пропорциональна скорости заряда:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{4W\sigma}{3c}v.$$

8. Определить эффективное сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором, с учётом торможения излучением.

Решение. Уравнение движения заряда в падающей волне пишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

В силе торможения можно подставить приближённо $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$; тогда получим

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t},$$

где $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Отсюда находим

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Эффективное сечение:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

§ 77. Рассеяние волн с малыми частотами

Рассеяние электромагнитных волн системой зарядов отличается от рассеяния одним (неподвижным) зарядом прежде всего тем, что благодаря наличию собственного движения зарядов в системе частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Именно, в спектральное разложение рассеянного излучения входят, наряду с частотой ω падающей волны, также и частоты вида $\omega' = \omega + \sum_l \omega^{(l)}n^{(l)}$ (где $\omega^{(l)}$ — основные частоты условно-периодического движения частиц в системе, а $n^{(l)}$ — произвольные целые числа; см. примечание на стр. 133). Рассеяние с изменением частоты называют некогерентным (или комбинационным) в противоположность когерентному рассеянию без изменения частоты.

Предполагая поле падающей волны слабым, мы можем представить плотность тока в виде $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}_0$ — плотность тока в отсутствии внешнего поля, а $\mathbf{j}'$ — изменение тока под влиянием падающей волны. Соответственно этому векторный потенциал (и другие величины) поля системы тоже будет иметь вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ определяются токами $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}'$. Очевидно, что $\mathbf{A}'$ описывает рассеянную системой волну.

Рассмотрим рассеяние волны, частота ω которой мала по сравнению со всеми собственными частотами системы. Рассеяние будет состоять как из когерентной, так и из некогерентной части, но мы будем рассматривать здесь только когерентное рассеяние.

Для вычисления поля рассеянной волны, при достаточно малой частоте ω, всегда можно пользоваться тем разложением запаздывающих потенциалов, которое было произведено в §§ 67 и 70, даже если скорости частиц в системе и не малы по сравнению со скоростью света. Действительно, для законности указанного разложения интеграла

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}}\,dV$$

необходимо лишь, чтобы время $\mathbf{rn}/c \sim a/c$ было мало по сравнению со временем $\sim 1/\omega$, в течение которого распределение токов меняется заметным образом; при достаточно малых $\omega\,(\omega \ll c/a)$ это условие выполняется независимо от величины скоростей частиц в системе.

Первые члены разложения дают:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}] + [[\ddot{\mathbf{m}}'\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]\right\},$$

где $\mathbf{d}'$, $\mathbf{m}'$ — части дипольного и магнитного моментов системы, которые создаются падающим на систему рассеиваемым излучением. Следующие члены разложения содержат производные по времени более высокого порядка, чем второго, и мы их опускаем.

Компонента $\mathbf{H}'_\omega$ спектрального разложения поля рассеянной волны с частотой, равной частоте падающего излучения, определится этой же формулой, в которой надо вместо всех величин подставить их компоненты Фурье: $\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathbf{m}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{m}'_\omega$. Тогда получаем:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2R_0}\left\{[\mathbf{n}\mathbf{d}'_\omega] + [\mathbf{n}\,[\mathbf{m}'_\omega\mathbf{n}]]\right\}. \tag{77,1}$$

Следующие члены разложения поля дали бы величины, пропорциональные более высокой степени малой частоты. Если скорости всех частиц в системе малы ($v \ll c$), то в (77,1) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение v/c. Тогда

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2R_0}\,\omega^2\,[\mathbf{n}\mathbf{d}'_\omega]. \tag{77,2}$$

Если сумма зарядов в системе равна нулю, то при $\omega \to 0$ $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ стремятся к постоянным пределам (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое). Поэтому при малых ω ($\omega \ll v/c$) можно считать $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ не зависящими от частоты. Мы видим отсюда, что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты, Интенсивность же её, следовательно, пропорциональна ω^4. Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой эффективное сечение рассеяния (когерентного) пропорционально четвёртой степени частоты падающего излучения [1]).

§ 78. Рассеяние волн с большими частотами

Рассмотрим рассеяние волн системой зарядов, предполагая, что частота ω волны велика по сравнению с основными собственными частотами системы. Последние имеют порядок величины $\omega_0 \sim v/a$, так что ω должно удовлетворять условию

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{78,1}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v \ll c$).

Согласно условию (78,1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн можно не учитывать взаимодействия зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})},$$

где $\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}_1$ — волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна ω, а вторая — порядка $kv \sim v\omega/c \ll \omega$). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части $\mathbf{r}$ постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})}. \tag{78,2}$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем согласно общей формуле (66,2):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}}\, dV = \frac{1}{cR_0}\sum (e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}},$$

---

[1]) То же самое относится, впрочем, и к рассеянию света не только нейтральными атомами, но и ионами. Благодаря большой массе ядра, рассеянием, происходящим от движения иона как целого, можно пренебречь,

где сумма берётся по всем зарядам системы; $\mathbf{n}_2$ — единичный вектор в направлении рассеяния. Подставляя сюда (78,2), находим

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \tag{78,3}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ есть разность между волновым вектором $\mathbf{k}_1$ падающей и волновым вектором $\mathbf{k}_2 = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}_2$ рассеянной волн (строго говоря, волновой вектор $\mathbf{k}_2 = \frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_2$, где частота ω' рассеянной волны может отличаться от ω; однако изменение частоты при рассеянии порядка величины ω_0, т. е. в рассматриваемом случае мало по сравнению с самой частотой ω, и в $\mathbf{k}_2$ этим изменением можно пренебречь). Значение суммы в (78,3) должно браться в момент времени $t' = t - \frac{R_0}{c}$ (для краткости опускаем, как обычно, индекс t' у $\mathbf{r}$); изменением $\mathbf{r}$ за время $\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}_2}{c}$ можно пренебречь ввиду предполагаемой малости скоростей частиц.

Для поля $\mathbf{H}'$ рассеянной волны находим согласно (66,3):

$$\mathbf{H}' = \frac{[\mathbf{n}_2\mathbf{E}_0]}{c^2R_0} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \tag{78,4}$$

Поток энергии в элемент телесного угла в направлении $\mathbf{n}_2$ равен

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{4\pi} R_0^2\,do = \frac{1}{4\pi c^3} [\mathbf{n}_2\mathbf{E}_0]^2 \left| \sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2.$$

Разделив это на поток энергии $\frac{c}{4\pi}E_0^2$ падающей волны и вводя угол θ между направлением поля $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно эффективное сечение рассеяния в виде

$$d\sigma = \overline{\left| \sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2} \sin^2\theta\,do. \tag{78,5}$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится ввиду того, что рассеяние наблюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (78,1) следует неравенство $\lambda \ll (c/v)\,a$. Что же касается относительной величины λ и a, то возможны оба предельных случая $\lambda \gg a$ и $\lambda \ll a$. В обоих этих случаях общая формула (78,5) значительно упрощается.

В случае $\lambda \gg a$ в выражении (78,5) $\mathbf{qr} \ll 1$, поскольку $q \sim 1/\lambda$, а r — порядка величины a. Заменяя соответственно этому $e^{i\mathbf{qr}}$ единицей, имеем

$$d\sigma = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,6}$$

В частности, при рассеянии атомом с Z электронами

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{78,7}$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату атомного номера [членом, соответствующим ядру атома, в сумме (78,6) можно пренебречь, поскольку масса ядра значительно больше массы электронов].

Перейдём теперь к случаю $\lambda \ll a$. В квадрате суммы, стоящем в (78,5), наряду с квадратами $(e^2/mc^2)^2$ модуля каждого из членов имеются произведения вида

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{e'^2}{m'c^2} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ пробегают значения в интервале порядка a. Поскольку $q \sim 1/\lambda$, $\lambda \ll a$, то экспоненциальный множитель $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ является в этом интервале быстро осциллирующей функцией, и её среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при $\lambda \ll a$ эффективное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = \sum \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,8}$$

В частности, при рассеянии атомом имеем в этом случае:

$$d\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do, \tag{78,9}$$

т. е. рассеяние пропорционально первой степени атомного номера. Заметим, что формулы (78,8) и (78,9) неприменимы при малых углах рассеяния (порядка λ/a), так как в этом случае q уже невелико, и показатель $\mathbf{qr}$ невелик по сравнению с единицей.

Для определения эффективного сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту ω. Выражение (78,4) для поля зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, и, кроме того, от времени зависит также и сумма $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{qr}(t)}$. Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой ω ещё и другие (хотя и близкие к ней) частоты. Та часть поля, которая обладает частотой ω (т. е. зависит от времени только посредством множителя $e^{-i\omega t}$), получается, очевидно, если усреднить по времени (т. е. по движению зарядов) сумму $\sum \frac{e^2}{m} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$. Соответственно этому выражение для эффективного сечения $d\sigma_{\text{ког}}$ когерентного рассеяния отличается от полного сечения $d\sigma$ тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нём стоит квадрат модуля среднего значения суммы

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left|\overline{\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}\right|^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,10}$$

В случае, если $\lambda \gg a$, мы можем опять заменить $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{78,11}$$

Сравнивая это с полным эффективным сечением (78,6), мы видим, что $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$, т. е. всё рассеяние является когерентным.

Если же $\lambda \ll a$, то при усреднении в (78,10) все члены суммы (будучи быстро осциллирующими функциями времени) исчезают, так что $d\sigma_{\text{ког}} = 0$. Таким образом, в этом случае рассеяние целиком некогерентно.

ГЛАВА X

ЧАСТИЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

§ 79. Гравитационные поля в нерелятивистской механике

Наряду с электромагнитными полями в природе существуют ещё поля другого рода — так называемые гравитационные поля, или поля тяготения. Эти поля обладают следующим основным свойством: все тела, вне зависимости их от массы или заряда, движутся в них одинаковым образом (если, конечно, начальные условия одинаковы).

Например, законы свободного падения в поле тяготения земли одинаковы для всех тел, какой бы массой они ни обладали, — все они приобретают одно и то же ускорение.

Это свойство гравитационных полей даёт возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчёта. Действительно, в инерциальной системе отсчёта свободное движение всех тел происходит прямолинейно и равномерно, и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковыми, то они будут одинаковыми всё время. Очевидно, поэтому, что если рассматривать свободное движение в заданной неинерциальной системе, то и относительно неё все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчёта те же, что в инерциальной системе при наличии гравитационного поля. Другими словами, неинерциальная система отсчёта эквивалентна некоторому гравитационному полю. Это обстоятельство называют принципом эквивалентности.

Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной системе отсчёта. Свободно движущиеся в такой системе отсчёта тела любой массы будут, очевидно, обладать относительно этой системы одинаковым постоянным ускорением, — равным и противоположным ускорению самой системы отсчёта. Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле, например, в поле тяготения земли (в небольших участках его, где поле можно рассматривать как однородное). Таким образом, равномерно ускоренная система отсчёта эквивалентна постоянному однородному внешнему полю.

Несколько более общим случаем является неравномерно ускоренная, поступательно и прямолинейно движущаяся система отсчёта, — она, очевидно, эквивалентна однородному, но переменному гравитационному полю.

Необходимо, однако, отметить, что поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчёта, всё же не вполне тождественны с «истинными» гравитационными полями, существующими и в инерциальных системах. А именно, между ними имеется весьма существенное отличие в отношении их свойств на бесконечности. На бесконечном расстоянии от создающих поле тел «истинное» гравитационное поле всегда стремится к нулю. Поля же, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчёта, на бесконечности, напротив, неограниченно возрастают, или, в крайнем случае, остаются конечными по величине. Так, например, возникающие во вращающейся системе отсчёта центробежные силы неограниченно растут при удалении от оси вращения; поле, которому эквивалентна ускоренно прямолинейно движущаяся система отсчёта, одинаково во всём пространстве, в том числе и на бесконечности.

Поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчёта, исчезают, как только мы перейдём к инерциальной системе. В противоположность этому, «истинные» гравитационные поля (существующие и в инерциальной системе отсчёта) невозможно исключить никаким выбором системы отсчёта. Это видно уже непосредственно из указанного выше различия между условиями на бесконечности в «истинных» гравитационных полях и в полях, которым эквивалентны неинерциальные системы; поскольку последние на бесконечности к нулю не стремятся, то ясно, что никаким выбором системы отсчёта нельзя исключить «истинные» поля, обращающиеся на бесконечности в нуль.

Единственное, чего можно достичь соответствующим выбором системы отсчёта, это — исключения гравитационного поля в данном участке пространства, достаточно малом для того, чтобы в нём можно было считать поле однородным. Это можно сделать путём выбора ускоренно движущейся системы, ускорение которой было бы равно тому ускорению, которое приобретает частица, помещённая в рассматриваемом участке поля.

Движение частицы в гравитационном поле определяется в нерелятивистской механике функцией Лагранжа, имеющей (в инерциальной системе отсчёта) вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{79,1}$$

где φ — некоторая функция координат и времени, характеризующая поле и называемая гравитационным потенциалом [1]). Соответственно,

---

[1]) Ниже нам не придётся больше пользоваться электромагнитным потенциалом φ, так что обозначение гравитационного потенциала той же буквой не может привести к недоразумению.

уравнения движения частицы гласят

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{79,2}$$

Они не содержат массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы, что и является выражением указанного в начале параграфа основного свойства гравитационных полей.

§ 80. Гравитационное поле в релятивистской механике

Указанное в предыдущем параграфе основное свойство гравитационных полей, что все тела движутся в них одинаковым образом, остаётся в силе и в релятивистской механике. Остаётся, следовательно, и аналогия между гравитационными полями и неинерциальными системами отсчёта. Поэтому естественно при изучении свойств гравитационных полей в релятивистской механике тоже исходить из этой аналогии.

В инерциальной системе отсчёта в декартовой системе координат интервал ds определяется из соотношения:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

При переходе к любой другой инерциальной системе отсчёта (т. е. при преобразовании Лоренца) интервал, как мы знаем, сохраняет тот же самый вид. Однако, если мы перейдём к неинерциальной системе отсчёта, то ds^2 уже не будет суммой квадратов дифференциалов четырёх координат.

Так, например, при переходе к равномерно вращающейся системе координат

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t,\quad y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t,\quad z = z'$$

(Ω — угловая скорость вращения, направленная вдоль оси Z) интервал приобретает вид

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]\,dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - \\ - dz'^2 + 2c\Omega y'\,dx'\,dt - 2c\Omega x'\,dy'\,dt.$$

По какому бы закону ни преобразовывалось время, это выражение не может быть приведено к сумме квадратов дифференциалов четырёх координат.

Таким образом, в неинерциальной системе отсчёта квадрат интервала является некоторой квадратичной формой общего вида от дифференциалов координат, т. е. имеет вид

$$-ds^2 = g_{ik}dx_idx_k, \tag{80,1}$$

где g_{ik} — некоторые функции координат, т. е. пространственных координат x_1, x_2, x_3 и временной координаты x_0. Четырёхмерная система координат x_0, x_1, x_2, x_3 является, таким образом, при пользовании неинерциальными системами отсчёта криволинейной. Величины g_{ik}, определяя все свойства геометрии в каждой данной криволинейной системе координат, устанавливают, как говорят, метрику пространства-времени.

Поскольку ds^2 всё равно не является уже суммой квадратов, то не имеет смысла пользоваться мнимой временной координатой $x_4 = ict$. Действительную временную координату мы будем обозначать посредством x_0 (или ct)[1]).

Величины g_{ik} можно, очевидно, всегда считать симметричными по индексам i и k ($g_{ik} = g_{ki}$), поскольку они определяются из симметричной формы (80,1), куда g_{ik} и g_{ki} входят помноженными на одно и то же произведение $dx_i dx_k$. В общем случае имеется, очевидно, всего 10 различных величин g_{ik} — четыре с одинаковыми и $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ с различными индексами. В инерциальной системе отсчёта при пользовании декартовыми пространственными координатами $x_{1,2,3} = x, y, z$ и временем $x_0 = ct$ величины g_{ik} равны:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{00} = -1,$$
$$g_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k. \tag{80,2}$$

Систему координат (четырёхмерную) с этими значениями g_{ik} мы будем называть галилеевой.

В предыдущем параграфе было показано, что неинерциальные системы отсчёта эквивалентны некоторым силовым полям. Мы видим теперь, что в релятивистской механике эти поля определяются величинами g_{ik}.

То же самое относится и к «истинным» гравитационным полям. Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, соответственно чему оно определяется величинами g_{ik}. Это важнейшее обстоятельство означает, что геометрические свойства пространства-времени (его метрика) определяются физическими явлениями, а не являются неизменными свойствами пространства и времени.

Теория гравитационных полей, построенная на основе теории относительности, носит название общей теории относительности. Она была создана Эйнштейном (и окончательно сформулирована им в 1916 г.) и является, пожалуй, самой красивой из всех существующих физических теорий. Замечательно, что она была построена Эйнштейном чисто дедуктивным путём, и лишь в дальнейшем была подтверждена астрономическими наблюдениями.

---

[1]) Соответственно этому в дальнейшем по дважды повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 0 до 3, а по греческим — попрежнему от 1 до 3.

Как и в нерелятивистской механике, между «истинными» гравитационными полями и полями, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчёта, имеется коренное отличие. При переходе к инерциальной системе отсчёта квадратичная форма (80,1), т. е. величины g_{ik}, получаются из их галилеевых значений посредством простого преобразования координат. Соответственно этому в инерциальной системе отсчёта g_{ik} имеют весьма специальный вид, именно такой, который может быть приведён во всём пространстве к галилеевым значениям (80,2) посредством преобразования координат. То, что такой вид действительно является лишь весьма специальным, видно из того, что преобразованием всего лишь четырёх координат нельзя, в общем случае, привести десять величин g_{ik} к наперёд заданному виду.

«Истинное» гравитационное поле не может быть исключено никаким преобразованием координат. Другими словами, при наличии гравитационного поля пространство-время таково, что определяющие его метрику величины g_{ik} никаким преобразованием координат не могут быть приведены во всём пространстве к их галилеевскому виду. Такое пространство-время называется неэвклидовым или кривым в отличие от эвклидова или плоского, в котором $-ds^2$ всегда может быть приведено к сумме квадратов четырёх дифференциалов. В неэвклидовом пространстве не имеют места законы обычной эвклидовой геометрии[1]).

Единственное, чего можно достичь преобразованием координат в неэвклидовом пространстве, это приведения величин g_{ik} к значениям (80,2) (т. е. исключения гравитационного поля) в данном бесконечно малом элемента «объёма» пространства-времени, между тем как в остальном пространстве-времени g_{ik} остаются негалилеевыми. Действительно, в бесконечно малой области g_{ik} можно считать постоянными, а всякую квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к сумме квадратов Такую систему координат мы будем называть галилеевой для данной точки.

Заметим, что, будучи приведёнными в данной точке к диагональному виду, величины g_{ik} имеют, таким образом, одно отрицательное и три положительных главных значения. Отсюда следует, что

---

[1]) Строго говоря, для того чтобы имела место эвклидова геометрия, необходимо, чтобы ds^2 можно было привести именно к сумме квадратов дифференциалов координат, между тем как в реальном эвклидовом пространстве-времени дифференциалы трёх пространственных координат входят в ds^2 с одним, а квадрат dx_0^2 — с обратным знаком (если не вводить мнимых координат). Четырёхмерную геометрию, определяемую квадратичной формой $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$, иногда называют псевдоэвклидовой; мы, однако, не будем здесь пользоваться этим термином (заметим также, что в псевдоэвклидовом пространстве-времени чисто пространственная, т. е. трёхмерная, геометрия является, конечно, просто эвклидовой).

детерминант g, составленный из величин g_{ik}, в реальном пространстве-времени всегда отрицателен.

До сих пор мы говорили о пространственных и временной координатах, оставляя в стороне вопрос о том, каким образом эти координаты могут быть выбраны. Между тем, само понятие системы отсчёта приобретает в общей теории относительности смысл, отличный от того, какой она имела в специальной теории. В специальной теории относительности мы пользовались в качестве системы отсчёта совокупностью тел, находящихся на неизменных расстояниях, т. е. покоящихся друг относительно друга. В общей теории относительности это, однако, оказывается невозможным. Действительно, наличие какого-либо гравитационного поля означает, как мы видели, изменение метрики пространства-времени, при котором, в частности, меняется и метрика самого пространства, оказываясь к тому же зависящей от времени. Это приводит к тому, что ни в какой системе составляющие её тела не могут быть неподвижными друг относительно друга [1]). Очевидно, что в результате этого ни в какой системе тел нельзя будет рассматривать их взаимное расположение как неизменное.

Таким образом, в общей теории относительности теряет смысл понятие о неподвижности тел друг относительно друга. Более того, теряет смысл и вообще понятие какой-либо определённой скорости относительного движения тел.

В соответствии с этим для точного определения положения тел в пространстве при наличии гравитационного поля необходимо, строго говоря, иметь систему из бесконечного числа тел, заполняющих всё пространство. Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчёта в общей теории относительности.

§ 81. Криволинейные координаты

Как мы видели, при изучении гравитационных полей мы сталкиваемся с необходимостью рассматривать явления в криволинейных координатах. В связи с этим необходимо развить четырёхмерную геометрию в произвольных криволинейных координатах. Этому посвящены §§ 80—85.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

---

[1]) Неизбежность таких деформаций видна, например, из того, что в неэвклидовом пространстве отношение длины окружности к её радиусу не равно 2π и, вообще говоря, меняется со временем. Поэтому, если расстояния тел по радиусу окружности остаются неизменными, то расстояния по окружности должны изменяться, и наоборот.

где f^i — некоторые функции. При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются согласно соотношению

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{81,1}$$

Всякая совокупность четырёх величин A^i $(i = 0, 1, 2, 3)$, которые при преобразовании координат преобразуются как их дифференциалы, называется контравариантным 4-вектором. Таким образом, при преобразовании координат

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{81,2}$$

Компоненты контравариантных векторов мы будем обозначать с индексом сверху [1]).

Пусть φ есть некоторый скаляр. Четыре величины $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{81,3}$$

отличным от формул (81,2). Всякая совокупность четырёх величин A_i, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра, называется ковариантным 4-вектором. Таким образом, при преобразовании координат

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{81,4}$$

Компоненты ковариантых векторов мы будем обозначать с индексом внизу.

В декартовой системе координат нет разницы между ковариантными и контравариантными векторами, — правила преобразования (81,2) и (81,4) делаются здесь эквивалентными [2]).

---

[1]) Поскольку дифференциалы координат x^i сами составляют контравариантный вектор, мы пишем здесь и в дальнейшем индекс у координат сверху. Только иногда мы будем писать индекс у отдельных координат внизу, там, где писать их сверху было бы неудобно [например, x_2^2 вместо $(x^2)^2$].

[2]) Достаточно вспомнить, что в декартовых координатах градиент обладает такими же векторными свойствами, как и все другие векторы. Формально убедиться в эквивалентности преобразований (81,2) и (81,4) можно следующим образом. Преобразования различных декартовых систем координат друг в друга являются линейными преобразованиями вида $x^i = \alpha_{ik} x'^k$, где α_{ik} — постоянные, удовлетворяющие так называемым условиям ортогональности: $\alpha_{il}\alpha_{kl} = \delta_{ik}$. Согласно формулам (81,2) и (81,4) имеем $A^i = \alpha_{ik} A'^k$ и $A'_i = \alpha_{li} A_l$. Умножив второе из этих равенств на α_{li} и суммируя по индексу l, получим $A_l = \alpha_{li} A'_i$, т. е. такое же преобразование, как и для A^l.

В связи с наличием в криволинейных координатах двух видов векторов имеется три вида тензоров 2-го ранга. Контравариантным тензором 2-го ранга A^{ik} называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведение компонент двух контравариантных векторов, т. е. по закону

$$A^{ik}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}A'^{lm}. \tag{81,5}$$

Аналогично определяется ковариантный тензор, преобразующийся по формулам

$$A_{ik}=\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'_{lm}, \tag{81,6}$$

и смешанный тензор, преобразующийся согласно формулам

$$A^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'^l_m. \tag{81,7}$$

Совершенно аналогично определяются тензоры высших рангов. Например, тензор $A_{ik}{}^{m}{}_{l}$, ковариантный по трём индексам и контравариантный по одному, преобразуется по формуле

$$A_{ik}{}^{m}{}_{l}=\frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}A'_{pr}{}^{t}{}_{s}.$$

Если тензор симметричен или антисимметричен по какой-нибудь паре индексов (одинаковой ковариантности или контравариантности), то это имеет место в любой системе координат. Для смешанного же тензора, скажем A^i_k, понятие симметрии или антисимметрии не имеет смысла, так как разным индексам соответствуют различные законы преобразования, и потому при переходе от одной системы координат к другой свойства симметрии, вообще говоря, меняются.

Если тензор (т. е. все его компоненты) равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и во всякой другой системе. Сумма двух тензоров одинакового ко- или контравариантного характера есть тензор того же характера.

Очевидно, что произведение компонент векторов A_i и B_k есть тензор вида A_{ik}, векторов A_i и B^k — тензор вида A^k_i. Произведение вектора A_l на тензор A^{ik} есть тензор вида A^{ik}_l и т. п.

В декартовых координатах из любых двух векторов можно составить скаляр — скалярное произведение этих векторов. В криволинейных же координатах можно составить скаляр не из любых двух векторов. Именно, нельзя составить скаляр из двух контравариантных или двух ковариантных векторов. Напротив, из контравариантного вектора A^i и ковариантного B_k можно составить скаляр; этим скаляром является величина A^iB_i, называемая скалярным произведением векторов A^i и B_i. Легко убедиться с помощью формул преобразования (81,2) и (81,4), что A^iB_i есть действительно скаляр.

Образование скалярного произведения из двух векторов является частным случаем следующего правила «упрощения» тензоров. Если мы имеем тензор $A_{\cdot\cdot k\cdot\cdot}^{\cdot\cdot i\cdot\cdot}$, то выражение $A_{\cdot i\cdot}^{\cdot i\cdot}$ (суммирование по i) есть тензор ранга на две единицы меньшего, чем ранг тензора $A_{\cdot k\cdot}^{\cdot i\cdot}$. Так, например, из тензора A_i^k можно образовать скаляр A_i^i. Действительно, согласно (81,7)

$$A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'^l_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A'^l_m = A'^l_l,$$

т. е. A_i^i есть действительно инвариант[1]). Подобно этому являются скалярами выражения A_{ik}^{ik}, $A_i^l B_k^i$ и т. п. Выражение A_{lli}^i есть ковариантный тензор второго ранга, $A_k^i B^k$ — контравариантный вектор и т. п.

Заметим, что выражения, получающиеся при суммировании по двум верхним или двум нижним индексам (например, A_{kll}^i), не являются тензорами. В дальнейшем мы не будем пользоваться такими величинами.

Единичным тензором в криволинейных координатах является смешанный тензор δ_i^k, компоненты которого $\delta_i^k = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1. Если A^k — вектор, то при умножении на δ_k^i мы получим

$$A^k \delta_k^i = A^i,$$

т. е. опять вектор; это и доказывает, что δ_k^i является тензором.

Квадрат элемента длины ds^2 есть квадратичная функция дифференциалов dx^i, т. е.

$$-ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{81,8}$$

где g_{ik} — функции координат; g_{ik} симметричны по индексам i и k, т. е.

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{81,9}$$

Поскольку произведение (упрощённое) g_{ik} на контравариантный тензор $dx^i dx^k$ есть скаляр, то g_{ik} есть ковариантный тензор. Тензор g_{ik} носит название метрического тензора.

Как уже указывалось в § 80, в реальном эвклидовом пространстве-времени соответствующим выбором системы координат тензор g_{ik} можно всегда преобразовать (в данной точке) к галилеевской форме

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{81,10}$$

[1]) Скаляр и инвариант — синонимы.

Два тензора A_{ik} и B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik}B^{kl}=\delta_i^l.$$

В частности, контравариантным метрическим тензором g^{ik} называется тензор, обратный тензору g_{ik}, т. е.

$$g_{ik}g^{kl}=\delta_i^l. \qquad (81,11)$$

Галилеевский тензор $g^{(0)ik}$ имеет, очевидно, такие же компоненты, как и тензор $g_{ik}^{(0)}$.

В декартовой (четырёхмерной) системе координат, как уже упоминалось, нет различия между ко- и контравариантными векторами; это различие, однако, появляется при переходе к криволинейным координатам. Поэтому, если какая-нибудь физическая величина в декартовой системе координат является вектором, то при переходе к криволинейным координатам она может быть представлена в двух формах: в виде ковариантного и в виде контравариантного вектора. Две формы одного и того же вектора мы будем обозначать одинаковой буквой, но с индексами вверху и внизу (A^i и A_i).

Легко найти формулы, по которым должен совершаться переход от ковариантной к контравариантной форме вектора и обратно. Раньше всего, очевидно, что единственными величинами, которые могут определять связь между ко- и контравариантными компонентами, являются компоненты метрического тензора. Далее, искомые соотношения должны приводить в декартовой системе отсчёта (т. е. при $g_{ik}=\delta_{ik}$) к $A_i=A^i$[1]). Для того чтобы выразить контравариантный вектор через ковариантный, мы должны, следовательно, составить из компонент A_i и из компонент метрического тензора контравариантный вектор, который бы удовлетворял поставленному условию. Таковым является:

$$A^i=g^{ik}A_k, \qquad (81,12)$$

обратно:

$$A_i=g_{ik}A^k. \qquad (81,13)$$

---

[1]) В этом и аналогичных местах, где для доказательства мы пользуемся декартовой системой координат, нужно иметь в виду, что декартову систему координат можно выбрать только в том случае, когда пространство эвклидово. В случае же неэвклидова пространства надо для доказательства рассматривать систему координат, декартову в данном бесконечно малом элементе объёма, что всегда можно сделать (см. § 80). Все выводы остаются тогда теми же самыми и для неэвклидова пространства. Ниже мы будем в подобных случаях для краткости всегда говорить о декартовой системе координат; нужно иметь в виду, что все результаты в равной мере применимы и к неэвклидову пространству.

Необходимо отметить, что в реальном пространстве-времени, если пользоваться действительными координатами x^i, $-ds^2$ может быть, приведено в данном бесконечно малом элементе только к галилееву виду, в котором три квадрата дифференциалов входят с положительными знаками, а один — с отрицательным. Это обстоятельство, однако, ничего не меняет в выводах этого и следующего параграфов, так как для перехода от галилеевых координат к четырёхмерным декартовым надо ввести только вместо координаты x^0 её же, умноженную на i.

Действительно, в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$ и эти формулы дают, как и должно быть, $A_i = A^i$.

Заметим, что в галилеевых координатах ко- и контравариантные компоненты вектора не в точности совпадают. Именно, $A_\alpha = A^\alpha$, $A_0 = -A^0$.

Всё сказанное относится также и к тензорам. Всякий тензор в декартовой системе координат при переходе к криволинейным координатам можно представить в нескольких формах с разным ко- и контравариантным характером. Разные формы одного и того же тензора мы тоже будем обозначать одинаковой буквой с разными расположениями индексов. Переход между разными формами тензора совершается аналогично тому, как он совершается у векторов. Так,

$$A^i_{kl} = g_{lm} A^{im}_k, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \text{ и т. д.}$$

Заметим что если тензор 2-го ранга несимметричен, то следует различать $A_k{}^i$ и $A^k{}_i$, т. е. место, с которого индекс был поднят.

В декартовой системе координат квадрат абсолютной величины вектора равен сумме квадратов их компонент. Очевидно что в криволинейных координатах квадратом абсолютной величины вектора является скаляр

$$A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \tag{81,14}$$

Полезно заметить, что индексы, по которым производится суммирование в произведениях тензоров, имеют некоторую свободу передвижения. Так, например,

$$A_{ik} B^{ik} = A^{ik} B_{ik}, \quad A_{ik} B^{lk} = A_i{}^k B^l{}_k \text{ и т. д.}$$

Индекс может быть поднят у одного из множителей при условии, что такой же индекс будет опущен в другом (это легко проверить, воспользовавшись связью между ковариантными и контравариантными компонентами тензоров, осуществляемой тензором g_{ik}).

В § 6 был определён (в декартовых координатах) совершенно антисимметричный единичный псевдотензор e_{iklm}. Преобразуем теперь его к произвольной криволинейной системе координат. Предварительно заметим, что в силу определения e_{iklm} мы можем написать для произвольного тензора k_{ik}:

$$e_{nrst} k_{ni} k_{rk} k_{sl} k_{tm} = k e_{iklm}, \tag{81,15}$$

где k — детерминант, составленный из величин k_{ik}. Действительно, отдельные члены детерминанта получают, выбирая четыре элемента по одному из каждой строки (так что $n \neq r \neq s \neq t$) и из каждого столбца (так что $i \neq k \neq l \neq m$) и ставя перед их произведением знак $+$ или $-$, смотря по тому, можно ли порядок номеров столбцов перевести в порядок номеров строк посредством чётного или нечётного числа транспозиций.

Согласно общим правилам преобразования тензоров и с помощью (81,15) имеем при переходе к криволинейным координатам

$$e_{iklm} = e'_{nrst} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x'^t}{\partial x^m} = e'_{iklm} J, \tag{81,16}$$

где

$$J = \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

есть якобиан преобразования от координат x^i к x'^i. Этот якобиан может быть выражен через детерминант g', составленный из компонент тензора g'_{ik}. Для этого заметим, что поскольку в декартовой системе координат $g_{ik} = \delta_{ik}$, то согласно формулам преобразования

$$\delta_{ik} = g'_{lm} \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k}.$$

Приравнивая детерминанты, составленные из величин, стоящих с обеих сторон этого равенства, имеем $1 = g'J^2$, т. е. $\sqrt{g'} = 1/J$; мы будем, однако, писать в дальнейшем всегда под корнем $-g$, так как в действительности во всех координатах, относящихся к реальному пространству-времени, детерминант g отрицателен (см. § 80). Из (81,16) находим теперь, что

$$e'_{iklm} = \sqrt{-g'}\, e_{iklm}.$$

Таким образом, в криволинейных координатах антисимметричный единичный тензор 4-го ранга должен быть определён как

$$E_{iklm} = \sqrt{-g}\, e_{iklm}.$$

Путём поднятия индексов у тензора $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$ легко найти, что контравариантным единичным антисимметрическим тензором 4-го ранга является

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e_{iklm}.$$

В декартовой системе координат интеграл от скаляра по $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ есть тоже скаляр, т. е. $d\Omega$ ведёт себя при интегрировании как инвариант (§ 6). При переходе к криволинейным координатам x'^i элемент интегрирования $d\Omega$ переходит в $\frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g'}\, d\Omega'$. Таким образом, в криволинейных координатах при интегрировании по некоторой области 4-пространства $\sqrt{-g}\, d\Omega$ ведёт себя как инвариант[1]).

[1]) Если φ есть скаляр, то величину $\sqrt{-g}\,\varphi$, дающую при интегрировании по $d\Omega$ инвариант, иногда называют скалярной плотностью. Аналогично

Всё сказанное в конце § 6 относительно элементов интегрирования по гиперповерхности, поверхности и линии остаётся в силе и в криволинейных координатах, с тем только отличием, что несколько меняется определение дуальных тензоров. Элемент «площади» гиперповерхности, построенный на трёх бесконечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметрический тензор dS^{ikl}; дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}e_{iklm}$, т. е. равен

$$\sqrt{-g}\,dS_i = \frac{1}{6}e_{klmi}dS^{klm}\sqrt{-g}. \tag{81,17}$$

Аналогично, если df^{ik} есть элемент поверхности (двухмерной), построенный на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как

$$\sqrt{-g}\,df^*_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}e_{iklm}df^{lm}. \tag{81,18}$$

Мы оставляем здесь обозначения dS_i и df^*_{ik}, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6}e_{klmi}dS^{klm}$ и $\frac{1}{2}e_{iklm}df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6,11)—(6,13) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин. Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по объёму (теорема Гаусса), осуществляющегося заменой

$$dS_i \rightarrow d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{81,19}$$

§ 82. Расстояния и промежутки времени

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчёта ничем не ограничен: тремя пространственными координатами x^1, x^2, x^3 могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата x^0 может определяться произвольно идущими часами. Возникает вопрос о том, каким образом по значениям величин x^1, x^2, x^3, x^0 можно определить истинные расстояния и промежутки времени.

говорят о векторной и тензорной плотностях $\sqrt{-g}A^i$, $\sqrt{-g}A^{ik}$ и т. д. Эти величины дают вектор или тензор при интегрировании по бесконечно малому 4-объёму (интеграл $\int A^i\sqrt{-g}\,d\Omega$ по конечной области, вообще говоря, не может быть вектором, так как законы преобразования вектора A^i в разных точках области различны).

Определим сначала связь истинного времени, которое мы будем ниже обозначать посредством τ, с координатой x^0. Для этого рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке пространства. Тогда интервал ds между этими двумя событиями есть, как мы знаем, не что иное, как $cd\tau$, где $d\tau$ — промежуток времени (истинного) между обоими событиями. Полагая $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ в общем выражении $-ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, находим, следовательно,

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00} dx_0^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\, dx^0; \tag{82,1}$$

или, иначе, для времени между любыми двумя событиями, происходящими в одном и том же месте пространства,

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g_{00}}\, dx^0. \tag{82,2}$$

Эти соотношения и определяют промежутки истинного времени (или, как говорят ещё, собственного времени для данной точки пространства) по изменению координаты x^0. Заметим кстати, что величина g_{00}, как видно из приведённых формул, отрицательна:

$$g_{00} < 0. \tag{82,3}$$

Необходимо подчеркнуть разницу между смыслом условия (82,3) и смыслом условия, что три главных значения тензора g_{ik} должны быть положительными, а одно — отрицательным (стр. 259). Тензор g_{ik}, не удовлетворяющий второму из этих условий, вообще не может соответствовать какому бы то ни было реальному гравитационному полю, т. е. метрике реального пространства-времени. Невыполнение же условия (82,3) означало бы лишь, что соответствующая система отсчёта не может быть осуществлена реальными телами; если условие о главных значениях при этом выполняется, то надлежащим преобразованием координат можно добиться того, что g_{00} станет отрицательным (пример подобной системы представляет собой вращающаяся система координат — см. § 89).

Определим теперь элемент dl пространственного расстояния. В специальной теории относительности (§ 2) можно определять dl как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени. В общей теории относительности этого, вообще говоря, уже нельзя сделать, т. е. нельзя определить dl, просто положив $dx^0 = 0$ в ds. Это связано с тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой x^0.

Для определения dl поступим теперь следующим образом. Представим себе, что из данной точки пространства отправляется световой сигнал в другую точку, бесконечно близкую к ней, а потом обратно по тому же пути. Необходимое для этого время (отсчитываемое в одной и той же точке пространства), умноженное на c, есть, очевидно, удвоенное расстояние между обеими точками. Напишем интервал, выделив пространственную и временную координаты:

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{00}dx_0^2, \tag{82,4}$$

где по дважды повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Для двух событий, являющихся уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, интервал, как мы знаем, равен нулю. Полагая $ds^2 = 0$, находим для «времени» распространения сигнала из первой точки во вторую

$$dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}\right\}$$

(выбираем положительный корень уравнения $ds^2 = 0$). Для обратного движения сигнала из второй точки в первую «время» $dx_0^{(2)}$ определяется такой же формулой, где теперь надо изменить знак у всех dx^α, т. е.

$$dx_0^{(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}\right\}.$$

Таким образом, промежуток «времени» между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

$$dx_0^{(1)} + dx_0^{(2)} = -\frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}.$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда согласно (79,1) умножением на $\frac{\sqrt{-g_{00}}}{c}$, а расстояние dl между обеими точками — ещё умножением на $c/2$. В результате находим

$$dl^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta.$$

Это и есть искомое выражение, определяющее расстояние через элементы пространственных координат. Перепишем его в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{82,5}$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{82,6}$$

есть трёхмерный метрический тензор, определяющий метрику, т. е. геометрические свойства пространства[1]). Соотношениями (82,6)

[1]) Заметим, что тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ является тензором, обратным контравариантному трёхмерному тензору $g^{\alpha\beta}$. Действительно, из $g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i$ имеем,

устанавливается связь между метрикой реального пространства и метрикой четырёхмерного пространства-времени [1]).

Необходимо, однако, помнить, что g_{ik} зависят, вообще говоря, от x^0, так что и пространственная метрика (82,5) меняется со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать dl, — такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался бы. Таким образом, в общей теории относительности теряет, вообще говоря, смысл понятие об определённом расстоянии между телами, остающееся в силе лишь для бесконечно малых расстояний. Единственным случаем, когда расстояние может быть определено и в конечных областях пространства, являются такие системы отсчёта, в которых g_{ik} не зависят от времени, и потому интеграл $\int dl$ вдоль пространственной кривой имеет определённый смысл.

Перейдём теперь к определению понятия одновременности в общей теории относительности. Другими словами, выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, т. е. приведения в соответствие друг с другом показаний этих часов.

Пусть из некоторой точки B отправляется сигнал в бесконечно близкую к ней точку A, а затем сразу обратно из A в B. «Время» распространения сигнала из B в A и из A в B равно соответственно определённым выше $dx_0^{(2)}$ и $dx_0^{(1)}$, где расстояние считается от A к B. Если x^0 есть момент прибытия сигнала в A, то моментом его отправления из B есть $x^0 - dx_0^{(2)}$, а момент возвращения в B есть $x^0 + dx_0^{(1)}$.

в частности,

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \quad g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} = 0.$$

Определяя $g^{\alpha 0}$ из второго равенства и подставляя в первое, получим $g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, что и требовалось доказать.

Укажем также, что детерминанты g и γ, составленные соответственно из величин g_{ik} и $\gamma_{\alpha\beta}$, связаны друг с другом соотношением $g = g_{00}\gamma$.

[1]) Квадратичная форма (82,5) должна, очевидно, быть существенно положительной. Для этого её коэффициенты должны, как известно из теории форм, удовлетворять условиям:

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Выражая γ_{ik} через g_{ik}, легко найдём, что эти условия принимают вид

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} < 0, \quad g < 0.$$

Этим условиям, вместе с условием (82,3), должны удовлетворять компоненты метрического тензора во всякой системе отсчёта, которая может быть осуществлена с помощью реальных тел.

Одновременным приходу сигнала в A надо, очевидно, считать показание часов в B, лежащее посредине между моментом отправления и моментом обратного прибытия сигнала. Другими словами, некоторому моменту x^0 в точке A одновременен момент $x^0+\Delta x^0 = x^0 + \frac{dx_0^{(1)} - dx_0^{(2)}}{2}$ в точке B. С помощью приведённых выше выражений для $dx_0^{(1)}$ и $dx_0^{(2)}$ разность значений «времени» x^0 для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, можно представить в виде

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}. \tag{82,7}$$

Это соотношение даёт возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объёме пространства. Продолжая подобную синхронизацию из точки B дальше, можно синхронизовать часы, т. е. определить одновременность событий, вдоль любой линии (незамкнутой).

Однако если мы попытаемся произвести сихронизацию часов вдоль некоторого замкнутого контура, то это может оказаться невозможным. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для Δx^0 значение, вообще говоря, отличное от нуля. Тем более оказывается тогда невозможной синхронизация часов во всём пространстве. Другими словами, в общей теории относительности одновременность событий не только имеет различный смысл в разных системах отсчёта, как в специальной теории относительности, но, вообще говоря, не может быть установлена и внутри одной и той же системы отсчёта. Единственным случаем, когда синхронизация часов оказывается возможной, являются такие системы отсчёта, в которых все величины $g_{0\alpha}$ равны нулю (или могут быть обращены в нуль соответствующим выбором координаты x^0).

Наконец, если мы рассмотрим интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными событиями в другом месте пространства, то эти интервалы окажутся, вообще говоря, не равными друг другу. Другими словами, истинное время течёт различным образом в разных точках пространства. Между тем как в отсутствие гравитационного поля ход часов зависит только от выбора системы отсчёта, в общей теории относительности он различен в разных точках пространства даже в одной и той же системе отсчёта.

§ 83. Ковариантное дифференцирование

В декартовых координатах[1]) дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ от компонент вектора по координатам образуют тензор. В криволинейных же координатах это не имеет

[1]) А также в прямых косоугольных; вообще всегда, когда величины g_{ik} постоянны.

места; dA_i не есть вектор, а $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ не есть тензор. Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты в формулах преобразования (81,2), (81,4) являются функциями координат.

В сказанном легко убедиться и непосредственно. Для этого определим формулы преобразования для дифференциалов dA_i в криволинейных координатах. Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A'_k;$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k d\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k + A'_k\,\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} dx'^l.$$

Таким образом, dA_i преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов). Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^l} = 0$, т. е. если x^k являются линейными функциями от x'^k, формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} dA'_k,$$

т. е. dA_i преобразуется как вектор.

Мы займёмся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ в декартовых координатах. Другими словами, мы должны преобразовать $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ от декартовых координат к криволинейным.

Для того, чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства. Другими словами, надо каким-то образом «перенести» один из двух бесконечно близких векторов в точку, где находится второй, после чего определить разность обоих векторов, относящихся теперь к одной и той же точке пространства. Самая операция переноса должна быть при этом определена таким образом, чтобы в декартовых координатах указанная разность совпадала с обычным дифференциалом dA_i. Поскольку dA_i есть просто разность компонент двух бесконечно близких векторов, то это значит, что в результате операции переноса при пользовании декартовыми координатами компоненты вектора не должны изменяться. Но такой перенос есть не что иное, как перенос вектора параллельно самому себе. При параллельном переносе вектора его компоненты в декартовых координатах [1]) не меняются; если же пользоваться криволинейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменятся. Поэтому в криволинейных координатах разность компонент обоих векторов после перенесения одного из них в точку, где находится второй, не будет совпадать с их разностью до переноса (т. е. с дифференциалом dA_i).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй. Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами x^i есть A^i, то в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$. Вектор A^i подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку $x^i + dx^i$; его изменение при этом обозначим посредством δA^i. Тогда разность DA^i между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{83,1}$$

Изменение δA^i компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причём эта зависимость должна, очевидно, быть линейной. Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них. Таким образом, δA^i имеет вид

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{83,2}$$

где Γ^i_{kl} — некоторые функции координат. Γ^i_{kl} зависят, конечно, от системы координат; в декартовой [2]) системе координат $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Уже отсюда видно, что величины Γ^i_{kl} не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой. В неэвклидовом пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все Γ^i_{kl} в нуль во всём пространстве. Можно только выбрать такую систему координат — декартову для данной точки, — в которой Γ^i_{kl} обращаются в нуль в данном бесконечно малом участке [3]). Величины Γ^i_{kl} носят название сим-

[1]) Напомним, что в случае неэвклидова пространства для всех доказательств и определений вместо декартовой системы координат надо пользоваться системой координат, декартовой (вернее, галилеевой) для данного бесконечно малого участка.

[2]) А также и в любой прямой косоугольной.

[3]) Мы увидим ниже (§ 84), что Γ^i_{kl} выражаются через первые производные от метрического тензора g_{ik}. Можно доказать возможность выбора такой системы координат, в которой в данной точке все первые производные от g_{ik}, следовательно и Γ^i_{kl}, обращаются в нуль (при этом вторые производные от g_{ik} в нуль не обращаются).

волов Кристоффеля. Кроме величин Γ^i_{kl}, мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}$ [1]), определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \tag{83,3}$$

Очевидно, что, наоборот,

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \tag{83,4}$$

Легко связать и изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе с символами Кристоффеля. Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, очевидно, не меняются. В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_i и B^i суть некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы. Тогда из $\delta(A_iB^i) = 0$ имеем

$$B^i\delta A_i = -A_i\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^kA_idx^l,$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^i\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kB^idx^l.$$

Отсюда имеем, ввиду произвольности B^i,

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_k\,dx^l, \tag{83,5}$$

что и определяет изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя (83,2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}dx^l$ в (83,1), имеем

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{83,6}$$

Аналогично находим для ковариантного вектора

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{83,7}$$

Выражения, стоящие в скобках в (83,6) и (83,7), являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^l они дают опять вектор. Очевидно, что эти тензоры и являются теми тензорами, которые в криволинейных координатах играют ту же роль, что и тензор $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ в декартовых координатах. Эти тензоры носят название ковариантных производных соответственно векторов A^i и A_i. Мы будем обозначать

---

[1]) Вместо обозначений Γ^i_{kl} и $\Gamma_{i,kl}$ иногда пользуются обозначениями соответственно $\left\{ {kl \atop i} \right\}$ и $\left[{kl \atop i} \right]$.

их в виде $A^i_{;k}$ и $A_{i;k}$. Таким образом,

$$DA^i = A^i_{;l}\,dx^l,\quad DA_i = A_{i;l}\,dx^l, \tag{83,8}$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k, \tag{83,9}$$

$$A_{i,l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k. \tag{83,10}$$

В декартовых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Легко определить также ковариантную производную от тензора. Для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе. Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов A^iB^k. При параллельном переносе согласно (83,5)

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = -(A^{im}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})\,dx^l. \tag{83,11}$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;l}\,dx^l,$$

находим ковариантную производную $A^{ik}_{;l}$ тензора A^{ik} в виде

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{im}. \tag{83,12}$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного тензора A^i_k и ковариантного A_{ik} в виде

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_m + \Gamma^i_{ml}A^m_k, \tag{83,13}$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{im}. \tag{83,14}$$

Аналогично можно определить ковариантную производную тензора любого ранга. При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования. Чтобы получить ковариантную производную тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x^l, к обычной производной $\frac{\partial A^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^l}$ на каждый ковариантный индекс i ($A_{.i.}^{...}$) надо прибавить член $-\Gamma^k_{il}A^{...}_{.k.}$, а на каждый контравариантный индекс i ($A^{.i.}_{...}$) надо прибавить член $+\Gamma^i_{kl}A^{.k.}_{...}$.

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения. При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, т. е. как ковариантный вектор $\varphi_k = \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi = 0$ и потому $D\varphi = d\varphi$. Например, ковариантная производная произведения A_iB_k равна

$$(A_iB_k)_{;l} = A_{i;l}B_k + A_iB_{k;l}.$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные. Так,

$$A_i^{;k} = g^{kl}A_{i;l}, \qquad A^{i;k} = g^{kl}A^i_{;l}.$$

Докажем, что символы Кристоффеля Γ^i_{kl} симметричны по нижним индексам. Поскольку ковариантная производная вектора $A_{i;k}$ есть тензор, то и разность $A_{i;k} - A_{k;i}$ есть тензор. Пусть вектор A_i есть градиент скаляра, т. е. $A_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$. Тогда с помощью выражения (83,10) для $A_{i;k}$ имеем

$$A_{k;i} - A_{i;k} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki})\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)$. В декартовой системе координат ковариантные производные превращаются в обычные, а потому левая часть написанного равенства для вектора $A_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ обращается в нуль. Но поскольку $A_{k;i} - A_{i;k}$ есть тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он должен быть равен нулю в любой системе координат. Отсюда находим, что

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{83,15}$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \tag{83,16}$$

В общем случае имеется всего 40 различных величин Γ^i_{kl} — для каждого из четырёх значений индекса i имеется 10 различных пар значений индексов k и l (считая пары, получающиеся перестановкой k и l одинаковыми).

В заключение этого параграфа приведём ещё формулы преобразования из одной системы координат в другую для символов Кристоффеля. Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования с обеих сторон равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих сторон были одинаковы. Простое вычисление даст, таким образом,

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{83,17}$$

Из этой формулы видно, что величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям [когда исчезает второй член в (83,17)].

§ 84. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik} A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik} DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i:

$$Dg_{ik} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0. \tag{84,1}$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

Равенством $g_{ik;l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik}. Для этого напишем согласно общему определению (83,14) ковариантной производной от тензора:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma^m_{il} - g_{im} \Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Отсюда легко определить $\Gamma_{i,kl}$, например, следующим образом. Напишем значение производных от g_{ik}, переставляя индексы i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl},$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik},$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$):

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{84,2}$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{84,3}$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Выведем полезное для дальнейшего выражение для упрощённого символа Кристоффеля Γ^i_{ki}. Для этого определим дифференциал dg детерминанта g, составленного из компонент тензора g_{ik}; dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив её на свой коэффициент в детерминанте, т. е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik}, обратного тензору g_{ik}, равны, как известно, минорам детерминанта из величин g_{ik}, делённым на этот детерминант. Поэтому миноры детерминанта g равны gg^{ik}. Таким образом,

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik} \tag{84,4}$$

(поскольку $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_i = 4$, то $g^{ik}dg_{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$).

Из (84,3) имеем

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

Меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или согласно (84,4)

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{84,5}$$

Полезно заметить также выражение для величины $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$; мы имеем

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

С помощью (84,4) это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{84,6}$$

При различных вычислениях бывает полезным иметь в виду, что производные от контравариантного тензора g^{ik} связаны с производными от g_{ik} соотношениями

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{84,7}$$

(получающимися при дифференцировании равенства $g_{il}g^{lk}=\delta_i^k$). Наконец, укажем, что производные от g^{ik} могут быть выражены через величины Γ^i_{kl}. Именно, из тождества $g^{ik}{}_{;l}=0$ непосредственно следует, что

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_l}=-\Gamma^i_{ml}\,g^{mk}-\Gamma^k_{ml}\,g^{im}. \tag{84,8}$$

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A^i{}_{;i}$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты. Поскольку $A^i{}_{;k}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{lk}A^l$ [см. (83,9)], то

$$A^i_{;i}=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+\Gamma^i_{li}A^l=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^l\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

или окончательно

$$A^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^i)}{\partial x^i}. \tag{84,9}$$

Выведем аналогичное выражение для $A^{ik}{}_{;k}$ и для антисимметричного тензора A^{ik}. Из (83,12) имеем

$$A^{ik}{}_{;k}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{mk}A^{mk}+\Gamma^k_{mk}A^{im}.$$

Но поскольку $A^{mk}=-A^{km}$, то

$$\Gamma^i_{mk}A^{mk}=-\Gamma^i_{km}A^{km}=0.$$

Подставляя выражение (84,5) для Γ^i_{mk}, находим, следовательно,

$$A^{ik}{}_{;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{84,10}$$

Пусть теперь A_{ik} — симметричный тензор; определим выражение $A^k_{i;k}$ для его смешанных компонент. Мы имеем

$$A^k_{i;k}=\frac{\partial A^k_i}{\partial x^k}+\Gamma^k_{lk}A^l_i-\Gamma^l_{ik}A^k_l=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

В силу симметрии тензора A^{kl} два члена в скобках взаимно сокращаются и остаётся

$$A^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^k_i)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \tag{84,11}$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ есть антисимметричный тензор. В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k} - A_{k;i}$. Однако с помощью выражений для $A_{i;k}$ и ввиду того, что $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, имеем

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{84,12}$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{i2}}$ вторых производных от некоторого скаляра φ. Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдёт в $\varphi_{;i}^{;i}$. Но $\varphi_{;i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс i, имеем

$$\varphi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы (84,9) находим

$$\varphi_{;i}^{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right). \tag{84,13}$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объёму может быть написана ввиду (84,9) как

$$\oint A^i \sqrt{-g}\, dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{84,14}$$

§ 85. Движение частицы в гравитационном поле

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S = -mc\delta \int ds, \tag{85,1}$$

согласно которому частица движется так, что её мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т. е. в данном случае прямой (в обычном трёхмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

Очевидно, что движение частицы в гравитационном поле определяется принципом наименьшего действия в той же форме (85,1), так как гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики 4-пространства, проявляющимся только в изменении выражения ds через dx^i. Таким образом, в гравитационном поле частица движется так, что её мировая точка движется по экстремальной, или, как говорят, по геодезической линии в 4-пространстве x^0, x^1, x^2, x^3;

поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время неэвклидово, то эта линия уже отнюдь не является прямой.

Мы видели (§ 10), что в специальной теории относительности, т. е. в галилеевой 4-системе координат, уравнения движения свободной частицы суть $\frac{du^i}{ds}=0$, или иначе $du^i=0$, где $u^i=\frac{dx^i}{ds}$ есть 4-скорость. Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в уравнение

$$Du^i=0. \tag{85,2}$$

Из выражения (83,6) для ковариантного дифференциала вектора имеем

$$du^i+\Gamma^i_{kl}u^k dx^l=0.$$

Разделив это уравнение на ds, имеем в первом члене $\frac{du^i}{ds}=\frac{d^2x^i}{ds^2}$ и, таким образом, находим:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0. \tag{85,3}$$

Это и есть искомые уравнения движения. Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами Γ^i_{kl}, т. е. величинами, не имеющими тензорного характера. При $\Gamma^i_{kl}=0$ (85,3) переходит в обычные уравнения $\frac{d^2x^i}{ds^2}=0$.

Производная $\frac{d^2x^i}{ds^2}=\frac{du^i}{ds}$ есть 4-ускорение частицы. Поэтому мы можем назвать величину $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ «4-силой», действующей на частицу в гравитационном поле. Тензор g_{ik} играет при этом роль «потенциалов» гравитационного поля — его производные определяют «напряжённость» поля Γ^i_{kl}.

Уравнение (85,3) можно вывести и непосредственно из принципа наименьшего действия $\delta\int ds=0$. Имеем [1])

$$-\delta\, ds^2=-2ds\delta\, ds=\delta\,(g_{ik}dx^i dx^k)=dx^i dx^k\delta g_{ik}+2g_{ik}dx^i\,\delta\, dx^k=$$
$$=dx^i\, dx^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l+2g_{ik}dx^i d\delta x^k.$$

Поэтому

$$\delta S=-mc\int\delta\, ds=mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l+g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds=$$
$$=mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l-\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds+mcg_{ik}\frac{dx^i}{ds}\delta x^k\Big|. \tag{85,4}$$

Второй член исчезает, так как на пределах $\delta x^k=0$. Во втором члене

[1]) Вариацию δ не смешивать с изменением δ при параллельном переносе!

под интегралом заменим индекс k индексом l. Тогда мы находим, приравнивая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l:

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{d}{ds}\left(g_{il}\frac{dx^i}{ds}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2}-\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}=0.$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds},$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (84,2), получаем

$$g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma_{l,ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.$$

Умножая на g^{ml} и замечая, что $g^{ml}g_{il}=\delta_i^m$, а $g^{ml}\Gamma_{l,ik}=\Gamma_{ik}^m$, приходим к уравнению (85,3).

Из (85,4) имеем для вариации δS, рассматривая, как обычно, действительные траектории и один из пределов как переменный, выражение $\delta S=mcu_i\delta x^i$. Поэтому если мы определим 4-импульс p_i частицы в гравитационном поле попрежнему как производную $\frac{\partial S}{\partial x^i}$, то мы получим

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}=mcu_i\ ^{1)}. \tag{85,5}$$

Его квадрат равен

$$p_ip^i=-m^2c^2. \tag{85,6}$$

Подставляя сюда $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ вместо p_i, находим уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в гравитационном поле

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+m^2c^2=0. \tag{85,7}$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (85,3) не применимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал ds, как мы знаем, равен нулю, так что все члены в уравнении (85,3) обращаются в бесконечность. Как известно, направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырёхмерный волновой вектор

---

1) В связи с тем, что мы пользуемся координатой x^0 вместо x^4, связь компонент p_i с трёхмерным импульсом и энергией в галилеевых координатах отличается от той, которую мы имели раньше. Именно, пространственные и временная компоненты p^i равны $\mathbf{p}$ и $\mathscr{E}/c$, а компоненты ковариантного вектора p_i — соответственно $\mathbf{p}$ и $-\mathscr{E}/c$.

в виде $k^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$, где λ есть некоторый параметр. В специальной теории относительности, т. е. в эвклидовом пространстве, при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$ (см. § 53). В гравитационном поле это уравнение, очевидно, переходит в $Dk^i = 0$ или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \tag{85,8}$$

(из этих же уравнений определится и параметр λ).

Абсолютная величина волнового 4-вектора, как мы знаем (см. § 46), равна нулю, т. е.

$$k_i k^i = 0. \tag{85,9}$$

Подставляя сюда $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ вместо k^i (ψ — эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле в виде

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0. \tag{85,10}$$

§ 86. Предельный переход

В предельном случае малых скоростей релятивистские уравнения движения частицы в гравитационном поле должны перейти в соответствующие нерелятивистские уравнения. При этом надо иметь в виду, что из предположения о малости скоростей вытекает также условие, что само гравитационное поле должно быть слабым; в противном случае находящаяся в нём частица приобрела бы большую скорость.

Выясним, как связан в этом предельном случае метрический тензор g_{ik}, определяющий поле, с нерелятивистским потенциалом φ гравитационного поля.

В нерелятивистской механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа (79,1). Мы напишем её теперь в виде:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi,$$

прибавив постоянную $-mc^2$ (постоянные члены не существенны для функции Лагранжа). Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в пределе при $v/c \to 0$.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле, следовательно, имеет вид

$$S = \int L\, dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right) dt,$$

или, замечая, что $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}$,

$$S = -mc\int\left(c\,dt - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}}{c}\,d\mathbf{r} + \frac{1}{c}\varphi\,dt\right).$$

Сравнивая это с релятивистским действием $S = -mc\int ds$, мы видим, что в рассматриваемом предельном случае ds равно

$$ds = c\,dt - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}}{c}\,d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\varphi\,dt.$$

Возводя в квадрат и опуская члены порядка v^2/c^2, находим

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)\,dt^2 - d\mathbf{r}^2. \tag{86,1}$$

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна

$$g_{00} = -1 - \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{86,2}$$

Что касается остальных компонент, то из (86,1) следовало бы, что $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$. В действительности, однако, поправки к ним, вообще говоря, того же порядка величины, что и поправка в g_{00} (см. об этом подробнее в § 100). Невозможность определения этих поправок приведённым выше способом связана с тем, что поправка в $g_{\alpha\beta}$, имеющая тот же порядок величины, что и поправка в g_{00}, привела бы в функции Лагранжа к членам более высокого порядка малости (благодаря тому, что в выражении для ds^2 компоненты $g_{\alpha\beta}$ не умножаются на c^2, как это имеет место для g_{00}).

§ 87. Уравнения электродинамики при наличии гравитационного поля

Уравнения электромагнитного поля специальной теории относительности легко обобщить так, чтобы они были применимы в любой четырёхмерной криволинейной системе координат, т. е. в случае наличия гравитационного поля.

Тензор электромагнитного поля в специальной теории относительности определялся как $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Очевидно, что теперь он должен быть соответственно определён как $F_{ik} = A_{k;\,i} - A_{i;\,k}$[1].

[1] В галилеевых координатах компоненты A_i связаны теперь со скалярным и векторным потенциалами посредством $A_{1,2,3} = A^{1,2,3} = A_{x,y,z}$, $A_0 = -A^0 = -\varphi$ (так, чтобы стоящий в выражении для действия член $A_i\,dx^i$ имел прежнее значение). Соответственно этому меняется связь компонент F_{ik} с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$; имеем теперь

$$F_{12} = H_z,\quad F_{13} = -H_y,\quad F_{23} = H_x,$$
$$F_{10} = E_x,\quad F_{20} = E_y,\quad F_{30} = E_z.$$

Но в силу (84,12)

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{87,1}$$

и поэтому связь F_{ik} с потенциалом A_k не меняется. Вследствие этого первая пара уравнений Максвелла (25,5),

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \tag{87,2}$$

тоже сохраняет свой вид.

Для того чтобы написать вторую пару уравнений Максвелла, надо предварительно определить в криволинейных координатах 4-вектор тока. Это мы сделаем в точности аналогично тому, как мы поступали в § 27. Заряд, находящийся в элементе объёма $dV = dx^1dx^2dx^3$, можно написать в виде $de = \rho dV$, где плотность $\rho = \sum\limits_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ [см. (27,1)]. Умножая $de = \rho dV$ с обеих сторон на dx^i, имеем

$$de\, dx^i = \rho dV dx^i = \frac{\rho}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0} \sqrt{g}\, dV dx^0.$$

Инвариантный элемент 4-объёма есть $\sqrt{-g}\, dVdx^0 = \sqrt{-g}\, d\Omega$ (§ 81), так что 4-вектор тока равен

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{dx^0}. \tag{87,3}$$

$\frac{dx^i}{dx^0}$ есть скорость измерения при помощи «времени» x^0 $\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right.$ не есть вектор). Компонента j^0 4-вектора тока, помноженная на $\frac{1}{c}\sqrt{-g}$ есть пространственная плотность заряда.

В специальной теории относительности вторая пара уравнений Максвелла (29,2) имеет вид

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

В гравитационном поле они соответственно принимают вид

$$F^{ik}{}_{;k} = \frac{4\pi}{c} j^i,$$

или, согласно (84,10),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, F^{ik}) = \frac{4\pi}{c} j^i. \tag{87,4}$$

Уравнение непрерывности $\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$ (28,4) принимает теперь вид

$$j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g}\, j^i) = 0 \tag{87,5}$$

[согласно (84,9)].

Наконец, легко написать уравнения движения заряженной частицы при наличии одновременно гравитационного и электромагнитного полей. Для этого надо варьировать (при заданном поле) ту часть действия, которая зависит от взаимодействия частицы с обоими полями, т. е.

$$-mc\int ds+\frac{e}{c}\int A_k\,dx^k.$$

Проще, однако, написать искомые уравнения движения прямо путём простого обобщения уравнений (22,4) на криволинейные координаты, т. е. написать в них Du^i вместо du^i. Таким образом, мы находим

$$mc\frac{Du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^i{}_k u^k. \qquad (87,6)$$

§ 88. Постоянное гравитационное поле

Весьма важным частным случаем гравитационных полей являются постоянные гравитационные поля. В постоянном гравитационном поле можно выбрать такую систему отсчёта, в которой все величины, в частности, метрический тензор g_{ik}, не зависят от временной координаты x^0.

Гравитационное поле постоянно, в частности, в том случае, если все тела неподвижны (в системе отсчёта, в которой g_{ik} не зависят от x^0). Очевидно, что тогда оба направления времени равноценны (т. е. все уравнения не должны меняться при изменении знака у x^0). Отсюда следует, что в этом случае все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю, — в противном случае интервал ds изменился бы при замене x^0 на $-x^0$. Такого рода гравитационные поля мы будем называть статическими.

Гравитационное поле постоянно также и в том случае, когда тела совершают стационарное движение. Под стационарным мы понимаем здесь такое движение, при котором плотность и скорость материи в каждом элементе пространства постоянны. Примером такого движения является равномерное вращение симметрического тела вокруг своей оси симметрии. В этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны, — при изменении знака у времени меняется, например, знак угловой скорости вращения. В такого рода гравитационных полях, очевидно, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, не равны нулю. Мы будем называть такие постоянные поля стационарными.

Временную координату x^0, выбранную так, чтобы тензор g_{ik} не зависел от x^0, называют мировым временем. Необходимо при этом отметить, что выбор мирового времени не является вполне однозначным. Именно, мировое время определено только с точностью до произвольной функции от пространственных координат; очевидно, что при прибавлении такой функции все g_{ik} попрежнему не будут содержать x^0. Кроме того, x^0 можно умножить на произвольную постоянную.

Если мы имеем дело со статическим гравитационным полем, где мы имеем возможность пользоваться системой отсчёта, в которой $g_{0\alpha}=0$, то этим условием x^0 определяется настолько, что остаётся лишь возможность умножения его на произвольную постоянную. Если к тому же поле исчезает на бесконечности, то удобно выбрать систему отсчёта таким образом, чтобы на бесконечности интервал ds^2 приобретал галилееву форму, в частности, чтобы на бесконечности было $g_{00}=-1$. Этим требованием определяется тогда указанная произвольная постоянная, и выбор мирового времени делается однозначным. Если пользоваться системой отсчёта, в которой временной координатой является мировое время, то, поскольку, в частности, пространственная метрика не зависит от x^0, в такой системе имеет смысл определение расстояния между телами (см. § 82).

Из независимости g_{ik} от x^0 следует, в частности, что разность Δx^0 значений мирового времени для двух одновременных (в выясненном в § 82 смысле) событий, происходящих в двух заданных точках пространства, не зависит от x^0 (в статическом поле имеем просто $\Delta x^0=0$). Это значит, что если мы рассматриваем два события A и B, происходящих в некоторой точке пространства, и два других события A' и B', происходящих в другой точке пространства, причём A одновременно с A', а B — с B', то разность значений x^0 для событий A и B будет равна разности значений x^0 для событий A' и B'. Таким образом, можно сказать, что смысл мирового времени заключается в том, что его промежуток между какими-нибудь двумя событиями в некоторой точке пространства равен промежутку мирового времени между любыми другими двумя событиями, соответственно одновременными с первой парой событий, происходящих в любой другой точке пространства. Что касается связи между мировым временем и истинным, то формулу (82,1) можно написать теперь в виде

$$\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\,x^0, \tag{88,1}$$

применимом к любым конечным промежуткам времени. Одинаковым промежуткам мирового времени соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени.

Если скорости всех тел малы, а гравитационное поле является слабым, то можно воспользоваться приближённым выражением (86,2), и (88,1) даёт

$$\tau=\frac{x^0}{c}\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}},$$

и поскольку $\varphi/c^2\ll 1$, то приближённо

$$\tau=\frac{x_0}{c}\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,2}$$

Таким образом, собственное время течёт тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, т. е.

чем больше его абсолютная величина (ниже, в § 95, будет показано, что потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было выше указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам § 82 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всём пространстве. Заметим также, что элемент пространственного расстояния dl (82,5) равен в статическом поле просто

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{88,3}$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всём пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависит от x^0, то формулу (82,7) для разности значений мирового времени для двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,4}$$

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,5}$$

взятому по этому замкнутому контуру.

Может оказаться, что сумма $\frac{1}{g_{00}}g_{0\alpha}dx^\alpha$ является полным дифференциалом какой-либо функции координат (пространственных), так что интеграл (88,5) по замкнутому контуру окажется равным нулю, а синхронизация часов возможной. В этом случае появление компонент $g_{0\alpha}$ обусловлено не свойствами самой системы отсчёта, а просто неудачным выбором координаты x^0, и надлежащим её выбором можно всегда обратить $g_{0\alpha}$ в нуль.

Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в § 53, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени $\frac{x^0}{c}$, поэтому равна $\omega_0 = -c\frac{\partial\psi}{\partial x^0}$. Поскольку уравнение эйконала (85,10) в постоянном поле не содержит x^0, то частота ω_0 остаётся постоянной при распространении луча света. Частота же, измеренная в собственном времени, равна $\omega = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$; эта частота различна в разных точках пространства.

В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}$$

мы имеем

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{-g_{00}}}. \tag{88,6}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближённо:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,7}$$

Мы видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, т. е. при приближении к создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается.

Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1, имеет (в этой точке) частоту ω, то, придя в точку с потенциалом φ_2, он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную

$$\frac{\omega}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) = \omega\left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right).$$

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещёнными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на земле. Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}, \tag{88,8}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на земле наблюдается спектр, испускаемый на солнце или звёздах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (88,8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют «красным смещением».

Происхождение этого явления можно уяснить себе непосредственно на основании сказанного выше о собственном времени. В силу независимости всех величин от x^0, промежуток собственного времени, в течение которого некоторое колебание в световой волне распространится из одной заданной точки пространства в другую, одинаков для всех колебаний. Поэтому ясно, что число колебаний, происходящих в единицу мирового времени, будет одинаковым во всех точках вдоль луча. Но один и тот же промежуток мирового времени соответствует тем большему промежутку собственного времени, чем дальше мы находимся от создающих поле тел. Следовательно, частота, т. е. число колебаний в единицу собственного времени, будет падать при удалении света от этих масс.

При движении частицы в постоянном поле сохраняется её энергия, определяемая как производная $\left(-c\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)$ от действия по мировому времени; это следует, например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона-Якоби. Определённая таким образом энергия есть временнáя компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = -g_{00}dx_0^2 - dl^2$, и мы имеем для энергии, которую мы обозначим здесь посредством $\mathscr{E}_0$,

$$\mathscr{E}_0 = -mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = -mcg_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{-g_{00}dx_0^2 - dl^2}}.$$

Введём скорость $v = \frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}dx^0}$ частицы, измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{-g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (88,9)$$

Это есть та величина, которая остаётся постоянной при движении частицы. Величина же $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ при этом отнюдь не постоянна. Можно показать, что выражение (88,9) для энергии остаётся в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определённом по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы.

В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей находим приближённо из (88,9) с помощью равенства $-g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$:

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \qquad (88,10)$$

где $m\varphi$ — нерелятивистская потенциальная энергия частицы в гравитационном поле, что находится в согласии с функцией Лагранжа (79,1).

Задачи

1. Определить силу, действующую в постоянном гравитационном поле на медленно движущуюся частицу.

Решение. Из (85,3) имеем, опуская члены второго порядка по скорости:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=-\Gamma^\alpha_{00}(u^0)^2-2\Gamma^\alpha_{0\beta}u^0u^\beta.$$

С той же точностью имеем

$$u_iu^i=g_{00}(u^0)^2+2g_{0\alpha}u^0u^\alpha=-1.$$

Вводя трёхмерный вектор скорости как $v^\alpha=\frac{dx^\alpha}{d\tau}$, где $d\tau=\frac{1}{c}ds$ есть элемент собственного времени на движущемся теле (при малых скоростях этот вектор переходит в обычную галилееву скорость), получим

$$u^\alpha=\frac{v^\alpha}{c},\quad u^0\cong\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\frac{v^\alpha}{c}.$$

Величины $\Gamma^\alpha_{0\beta}$, Γ^α_{00} вычисляем по общей формуле (84,3), причём все производные по x^0 выпадают в силу постоянства поля. С помощью полученных таким образом выражений вычислим $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=\frac{w^\alpha}{c^2}$, где $w^\alpha=\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$ есть трёхмерный (пространственный) вектор ускорения. В ответе удобнее перейти к ковариантным компонентам; при этом надо иметь в виду, что связь между ко- и контравариантными компонентами пространственного вектора w^α определяется пространственным метрическим тензором $\gamma_{\sigma\beta}$, так что $w_\alpha=\gamma_{\alpha\beta}w^\beta$. При вычислении следует иметь в виду, что $\gamma_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha$ (см. примечание на стр. 269) и $\gamma_{\alpha\beta}g^{\beta0}=-\frac{g_{\alpha0}}{g_{00}}$ (в чём легко убедиться, умножая равенство $g^{\alpha i}g_{i0}=g^{\alpha\beta}g_{\beta0}+g^{\alpha0}g_{00}=0$ на $\gamma_{\gamma\alpha}$ и суммируя по α). В результате получим следующее выражение:

$$\frac{w_\alpha}{c^2}=-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{-g_{00}}+\sqrt{-g_{00}}\frac{v^\beta}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{g_{\alpha0}}{g_{00}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{g_{\beta0}}{g_{00}}\right)\right].$$

Сила f_α получается умножением w_α на массу тела. Вводя трёхмерный вектор с компонентами $g_\alpha=-\frac{g_{\alpha0}}{g_{00}}$ и обозначение $g_{00}=-h$, перепишем полученное выражение в трёхмерных обозначениях:

$$\mathbf{f}=-mc^2\,\mathrm{grad}\ln\sqrt{h}+mc\sqrt{h}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}].\tag{1}$$

Компоненты векторов и все векторные операции должны производиться здесь в криволинейных координатах, соответствующих пространственной метрике, определяемой тензором $\gamma_{\alpha\beta}$.

Отметим, что если тело неподвижно, то действующая на него сила [первый член в (1)] имеет потенциал. Второй член в (1) имеет вид, аналогичный силе Кориолиса; этот член присутствует в стационарном поле (когда $g_{0\alpha}$ отличны от нуля). Можно сказать, что маятник Фуко, находящийся в стационарном гравитационном поле, создаваемом вращающимся телом, испытывает такое же отклонение, какое он обнаружил бы, находясь на теле, вращающемся (в отсутствии гравитационного поля) с угловой скоростью $\Omega = \frac{c}{2}\sqrt{h}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$.

2. Вывести принцип Ферма для распространения лучей в постоянном гравитационном поле.

Решение. Принцип Ферма (см. § 53) гласит:

$$\delta \int k_\alpha \, dx^\alpha = 0,$$

где интеграл берётся вдоль луча, а подинтегральное выражение должно быть выражено через постоянную вдоль луча частоту ω_0 и дифференциалы координат. Замечая, что $k_0 = \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = -\frac{\omega_0}{c}$, пишем $k_0 = g_{0i} k^i$ или

$$-\frac{\omega_0}{c} = g_{00} k^0 + g_{0\alpha} k^\alpha .$$

Подставляя это в соотношение $k_i k^i = g_{ik} k^i k^k = 0$, написанное в виде

$$g_{00}\left(k^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} k^\alpha\right)^2 + \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0,$$

получим

$$\frac{1}{g_{00}}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 + \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0.$$

Из этого соотношения и из того, что вектор k^α должен иметь направление вектора dx^α, находим

$$k^\alpha = \frac{\omega_0}{c\sqrt{-g_{00}}} \frac{dx^\alpha}{dl},$$

где dl (82,5) есть элемент пространственного расстояния вдоль луча. Для того чтобы получить выражение для k_α, пишем $k^\alpha = g^{\alpha i} k_i = -g^{\alpha 0}\frac{\omega_0}{c} + g^{\alpha\beta} k_\beta$; помня, что тензором, обратным $g^{\alpha\beta}$, является $\gamma_{\alpha\beta}$, имеем отсюда

$$k_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c} g^{\beta 0}\right) = \gamma_{\alpha\beta}\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{dx^\beta}{dl} + g^{0\beta}\right).$$

Наконец, умножая на dx^α, получим принцип Ферма в виде (опуская постоянный множитель $\frac{\omega_0}{c}$):

$$\delta \int \left(\frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}} - \frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} dx^\alpha\right) = 0.$$

В статическом поле имеем просто

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}} = 0.$$

Обращаем внимание на то, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве, так как последняя определилась бы уравнением $\delta \int dl = 0$.

§ 89. Вращение

В качестве примера стационарного гравитационного поля рассмотрим равномерно вращающуюся систему отсчёта. Для определения интервала ds произведём преобразование от неподвижной системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими координатами r', φ', z') интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2.$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z. Если ось вращения совпадает с осями Z и Z', то имеем $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω — угловая скорость вращения. Подставляя это, находим искомое выражение для ds^2 во вращающейся системе отсчёта:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\,dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\,dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \qquad (89,1)$$

Необходимо отметить, что вращающейся системой отсчёта можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω. Действительно, из (89,1) видно, что при $r > c/\Omega$ g_{00} делается положительным, что недопустимо. Неприменимость вращающейся системы отсчёта на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей, чем скорость света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на величину [см. (88,5)]:

$$\Delta t = -\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

или, предполагая, что $\Omega r/c \ll 1$ (т. е. скорость вращения мала по сравнению со скоростью света):

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2}\int r^2 d\varphi = \pm\frac{2\Omega}{c^2}\,S, \qquad (89,2)$$

где S — площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения).

Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время t, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света, по определению, всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии и в каждой точке пользуемся собственным временем. Поскольку разница между собственным и мировым временем — порядка v^2/c^2, то при вычислении искомого промежутка времени t с точностью до величин порядка v/c этой разницей можно пренебречь. Поэтому имеем

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

где L — длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \qquad (89,3)$$

Эту формулу, как и формулу для первого приближения эффекта Допплера, можно легко вывести и чисто классическим путём.

Задача

Определить элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат.

Решение. С помощью (89,1), (82,5) и (82,6) находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}},$$

чем определяется пространственная геометрия во вращающейся системе отсчёта. Отметим, что отношение длины окружности в плоскости $z = \text{const.}$ (с центром на оси вращения) к её радиусу r равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}},$$

т. е. больше, чем 2π.

ГЛАВА XI

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 90. Тензор кривизны

Вернёмся опять к понятию параллельного переноса вектора. Как было сказано в § 83, в общем случае неэвклидова пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, декартовой в данном бесконечно малом элементе объёма.

Если $x^i = x^i(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой (s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ есть единичный вектор, касательный к кривой. Если рассматриваемая кривая является геодезической, то, как мы видели в § 85, вдоль неё $Du^i = 0$ [см. (85,2)]. Это значит, что если вектор u^i подвергнуть параллельному переносу из точки x^i на геодезической линии в точку $x^i + dx^i$ на той же линии, то он совпадёт с вектором $u^i + du^i$, касательным к линии в точке $x^i + dx^i$. Таким образом, при передвижении касательной к геодезической линии вдоль этой самой линии она передвигается параллельно самой себе.

С другой стороны, при параллельном переносе двух векторов «угол» между ними остаётся, очевидно, неизменным. Поэтому мы можем сказать, что при параллельном переносе любого вектора вдоль какой-либо геодезической линии угол между этим вектором и касательной к линии остаётся неизменным. Другими словами, при параллельном переносе вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменными.

Весьма существенным является то обстоятельство, что в неэвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую даёт разные результаты, если перенос совершается по разным путям. В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадёт с самим собой.

Для того чтобы уяснить это, рассмотрим неэвклидово двухмерное пространство, т. е. какую-нибудь кривую поверхность. На рис. 12

изображён кусок такой поверхности, ограниченный тремя геодезическими линиями. Подвергнем вектор *1* параллельному переносу вдоль контура, образованного этими линиями. При передвижении вдоль линии AB вектор *1*, сохраняя всё время одинаковый угол с этой линией, перейдёт в вектор *2*. При передвижении вдоль BC он таким же образом перейдёт в *3*. Наконец, при движении из C в A вдоль кривой CA, сохраняя постоянный угол с этой кривой, рассматриваемый вектор перейдёт в *1'*, не совпадающий с вектором *1*.

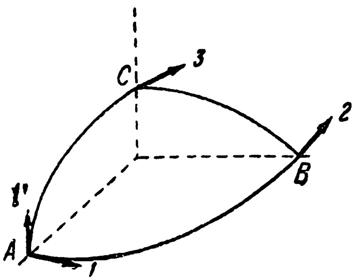

Рис. 12.

Выведем общую формулу, определяющую изменение вектора при параллельном переносе по некоторому бесконечно малому замкнутому контуру. Это изменение ΔA_k можно, очевидно, записать в виде $\oint \delta A_k$, где интеграл берётся по данному контуру. Подставляя вместо δA_k выражение (83,5), мы имеем

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

(стоящий под интегралом вектор A_i меняется по мере его переноса вдоль контура). Этот криволинейный интеграл мы можем преобразовать с помощью теоремы Стокса (6,14) в интеграл по поверхности, огибаемой данным контуром. Тогда

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right] df^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial\Gamma_{km}}{\partial x^l}A_i - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right] df^{lm}.$$

Но изменение вектора A_i вдоль контура есть его изменение благодаря параллельному переносу; поэтому производные от A_i мы можем определить прямо из $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, т. е. $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$. Подставляя это и меняя обозначение индексов в двух последних членах под интегралом, находим:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right\} A_i df^{lm}.$$

Ввиду бесконечной малости замкнутого контура мы можем заменить подинтегральное выражение его значением в некоторой точке внутри контура и вынести из-под знака интеграла. Оставшийся интеграл даст тогда просто площадь Δf^{lm} поверхности, огибаемой контуром, и мы получаем окончательно

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \tag{90,1}$$

где R^i_{klm} — тензор 4-го ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{90,2}$$

То, что R^i_{klm} — тензор, видно из того, что в (90,1) слева стоит вектор — разность ΔA_k значений вектора в одной и той же точке. Тензор R^i_{klm} называется тензором кривизны или тензором Римана-Кристоффеля.

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^k. Для этого заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta(A^k B_k) = 0$, где B_k — некоторый ковариантный вектор. С помощью (90,1) имеем отсюда

$$\Delta(A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k =$$
$$= B_k \left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm}\right) = 0,$$

или, ввиду произвольности вектора B_k:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}. \tag{90,3}$$

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_i по x^k и по x^l, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных. Оказывается, что разность $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ определяется тем же тензором кривизны, который мы ввели выше. А именно, имеет место формула

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}, \tag{90,4}$$

которую легко проверить непосредственным вычислением (это вычисление мы здесь для краткости опускаем). Аналогично, для контравариантного вектора

$$A^i{}_{;k;l} - A^i{}_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}. \tag{90,5}$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров [это проще всего сделать, рассматривая, например, вместо тензора A_{ik} частный случай тензора вида $A_i B_k$ и пользуясь при этом формулами (90,4) и (90,5); полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора].

Очевидно, что в эвклидовом пространстве тензор кривизны равен нулю. Действительно, в эвклидовом пространстве можно выбрать координаты, в которых во всём пространстве все $\Gamma^i_{kl}=0$, а потому и $R^i_{klm}=0$. В силу тензорного характера R^i_{klm}, он равен тогда нулю и в любой другой системе координат. Это связано с тем, что в эвклидовом пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется. В эвклидовом пространстве можно, очевидно, менять порядок ковариантного дифференцирования.

Имеет место и обратная теорема: если $R^i_{klm}=0$, то пространство эвклидово. Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, декартову в данном бесконечно малом участке. Если же $R^i_{klm}=0$, то параллельный перенос есть однозначная операция, и при помощи параллельного переноса декартовой системы из данного бесконечно малого участка во все остальные можно построить декартову систему во всём пространстве, т. е. пространство эвклидово.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли пространство эвклидовым или нет.

Заметим, что хотя в неэвклидовом пространстве и можно выбрать систему координат, которая была бы декартовой в данной точке, т. е. такую, чтобы в данной точке все Γ^i_{kl} обратились в нуль, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от Γ^i_{kl} не обращаются в нуль вместе с Γ^i_{kl}).

§ 91. Свойства тензора кривизны

Из выражения (90,2) для тензора R^i_{klm} непосредственно следует, что тензор кривизны антисимметричен по индексам l и m:

$$R^i_{klm}=-R^i_{kml}. \tag{91,1}$$

Далее, легко проверить, что имеет место следующее тождество:

$$R^i_{klm}+R^i_{mkl}+R^i_{lmk}=0. \tag{91,2}$$

Наряду со смешанным тензором кривизны R^i_{klm} употребляют также ковариантный тензор кривизны

$$R_{iklm}=g_{in}R^n_{klm}. \tag{91,3}$$

С помощью простых преобразований легко получить следующее выражение для R_{iklm}:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+$$
$$+g_{np}(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}). \tag{91,4}$$

Из этого выражения непосредственно вытекают следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm} = -R_{kilm}, \tag{91,5}$$

$$R_{iklm} = -R_{ikml}, \tag{91,6}$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}. \tag{91,7}$$

Из этих формул следует, в частности, что все компоненты R_{iklm}, у которых $i=k$ или $l=m$, равны нулю.

Наконец, для R_{iklm}, как и для R^i_{klm}, имеет место тождество (91,2):

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \tag{91,8}$$

Больше того, в силу соотношений (91,5)—(91,7) отсюда следует, что если в R_{iklm} произвести одну и ту же циклическую перестановку над любыми тремя индексами и полученные три компоненты сложить, то результат будет равен нулю.

Наконец, докажем ещё следующее тождество:

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0. \tag{91,9}$$

Его удобно проверить, воспользовавшись системой координат декартовой в данной точке. В силу тензорного характера соотношение (91,9) будет тогда иметь место в любой системе координат. Дифференцируя выражение (91,2) и полагая потом в нём $\Gamma^i_{kl}=0$, находим в рассматриваемой точке

$$R^i{}_{kl;m} = \frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}.$$

С помощью этого выражения легко убедиться в том, что (91,9) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путём упрощения построить тензор 2-го ранга. Такое упрощение можно произвести только одним способом. Действительно, если мы упростим R^m_{ikl} по индексам m и i, то получим нуль:

$$R^m_{mkl} = g^{im} R_{imkl} = 0$$

в силу антисимметричности R_{imkl} по индексам i и m. Упрощение по m и k (упрощение по m и l даст, очевидно, то же самое с обратным знаком) даёт тензор 2-го ранга

$$R_{ik} = R^l_{ilk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}. \tag{91,10}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik} = R_{ki}. \tag{91,11}$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}, \tag{91,12}$$

называемый скалярной кривизной пространства.

В силу соотношений (91,5—8), не все компоненты тензора кривизны независимы. Определим число независимых компонент тензора R_{iklm}. Рассмотрим сначала случай пространства с двумя измерениями, т. е. обычную поверхность; индексы i, k, l, m могут при этом иметь значения 1, 2. Компоненты, у которых одновременно i и k или l и m равны 1 или 2, равны нулю. Все же не равные нулю компоненты либо равны друг другу, либо отличаются знаком; таким образом, тензор кривизны имеет в этом случае только одну независимую компоненту, например R_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна $R = g^{il} g^{km} R_{iklm}$ в этом случае равна $R = 2R_{1212}/g^2$ (g — детерминант, составленный из величин g_{ik}). $R/2$ при этом оказывается равным известной гауссовой кривизне поверхности, т. е. единице, делённой на произведение главных радиусов кривизны.

Определим теперь число независимых компонент тензора кривизны в трёхмерном пространстве. Рассмотрим те компоненты, у которых есть только два различных индекса, т. е. компоненты вида R_{abab} (помнить, что здесь по индексам нет суммирования). Пару значений a и b можно выбрать из значений 1, 2, 3 тремя способами. Каждая пара a и b даёт в силу соотношений (91,5)—(91,7) только одну независимую компоненту; таким образом, компонент такого типа будет всего три. Компонент с тремя разными индексами, т. е. компонент вида R_{abac}, тоже будет всего три: R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}; все остальные равны этим или отличаются от них только знаком. Таким образом, в трёхмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент. Столько же компонент имеет симметрический тензор R_{ik}. Поэтому из линейных соотношений $R_{ik} = g^{ml} R_{limk}$ все компоненты тензора R_{iklm} могут быть выражены через R_{ik} и метрический тензор g_{ik}. Если выбрать систему координат, декартову в данной точке, то при преобразованиях, приводящих к простому повороту декартовой системы в рассматриваемой точке, компоненты метрического тензора в этой точке не изменятся. Компоненты же тензора, вообще говоря, изменятся. Соответствующим выбором системы координат всегда можно добиться того, чтобы три компоненты тензора кривизны обратились в данной точке в нуль; в частности, можно привести тензор R_{ik} к главным осям. Таким образом, кривизна трёхмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами.

Наконец, перейдём к четырёхмерному пространству. Компонент тензора кривизны с двумя разными индексами (т. е. типа R_{abab}) всего шесть: индексы a и b можно выбрать из четырёх значений 1, 2, 3, 4 шестью способами, а каждая пара значений даёт одну независимую компоненту. Компонент с тремя разными индексами всего 12: три различных индекса из 1, 2, 3, 4 можно выбрать четырьмя способами, а каждая тройка значений даёт три независимые компоненты (например, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}). Наконец, компонент, у которых все четыре индекса различны, имеется три: R_{1234}, R_{1423}, R_{1342}; остальные равны этим или отличаются только знаком. Но и из этих трёх компонент только две независимы, так как все три связаны друг с другом одним тождеством (88,2) $R_{1234}+R_{1423}+R_{1342}=0$. Таким образом, в четырёхмерном пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент [1]). Выбирая систему координат, декартову в данной точке, и рассматривая преобразования, поворачивающие эту декартову систему (так что значения g_{ik} в рассматриваемой точке не меняются), можно добиться того, чтобы шесть компонент тензора кривизны обратились в нуль. (Шесть есть число возможных независимых поворотов четырёхмерной системы координат.) Таким образом кривизна четырёхмерного пространства в каждой точке определяется 14 величинами.

Задача

Вычислить компоненты тензора R_{ik} (выделив из них чисто пространственную часть) в системе отсчёта, в которой $g_{0\alpha}=0$, $g_{00}=-1$ (надлежащим преобразованием четырёх координат всегда можно добиться выполнения этих четырёх условий).

Решение. При $g_{0\alpha}=0$ трёхмерный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ (82,6) совпадает с $g_{\alpha\beta}$ ($\gamma_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$). Производные $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}$ тоже составляют трёхмерный тензор, который мы обозначим посредством $\varkappa_{\alpha\beta}$. Непосредственное вычисление по формуле (91,10) приводит к следующему результату:

$$R_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\varkappa^{\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{4}\varkappa^{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta},$$

$$R_{0\alpha}=\frac{1}{2}\left(\varkappa^{\beta}_{\alpha;\beta}-\varkappa^{\beta}_{\beta;\alpha}\right),$$

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\varkappa_{\alpha\beta}+P_{\alpha\beta}.$$

Здесь $P_{\alpha\beta}$ есть трёхмерный тензор, выражающийся через $\gamma_{\alpha\beta}$, так же, как R_{ik} выражается через g_{ik}. Все операции поднимания индексов и ковариантного дифференцирования производятся здесь в трёхмерном пространстве, т. е. с помощью метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ (по таким же формулам, как в четырёхмерном пространстве, эти операции производятся с помощью тензора g_{ik}).

---

[1]) Выпишем комбинации индексов i, k, l, m, дающие независимые компоненты

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

причём $R_{1234}-R_{1324}+R_{1423}=0$.

§ 92. Действие для гравитационного поля

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля. Искомые уравнения получаются тогда путём варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

Действие S_g, как и действие для электромагнитного поля, должно быть выражено в виде интеграла по всему полю, т. е. по всему пространству и по временной координате x_0 между двумя заданными её значениями. Поскольку S_g должно быть инвариантно, то оно имеет вид

$$\int G\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

где G — некоторый скаляр. Для определения этого скаляра мы будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от «потенциалов» поля не выше второго порядка (подобно тому, как это имеет место для уравнений электромагнитного поля). Поскольку уравнения поля получаются путём варьирования действия, то для этого необходимо, чтобы скаляр G содержал производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}.

Однако из одних только величин g_{ik} Γ^i_{kl} невозможно построить инварианта. Это видно непосредственно из того обстоятельства, что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль. Существует, однако, скаляр R — кривизна 4-пространства, — который хотя и содержит наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными ещё и вторые производные от g_{ik}, но последние входят только линейно. Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных. Именно, $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно представить в виде

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}\,d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подинтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i (подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа). Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объём, по которому производится интегрирование в двух других интегралах. При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах области интегрирования вариация поля равна нулю. Следовательно, мы можем написать

$$\delta \int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сам же интеграл $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его первые производные. Поскольку, как видно из предыдущего, $\delta \int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ является единственным таким инвариантом, то мы можем написать

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi k}\,\delta \int G\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{c^3}{16\pi k}\,\delta \int R\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (92,1)$$

где k — новая универсальная постоянная. Аналогично тому, как это было сделано в § 26 для действия электромагнитного поля, можно видеть, что постоянная k должна быть положительна (см. конец этого параграфа).

Постоянная k называется гравитационной постоянной. Размерность k следует непосредственно из (92,1). Действие имеет размерность *г* · *см*^{2} · *сек*$^{-1}$; все координаты можно считать имеющими размерность *см*, а g_{ik} — безразмерными, и, следовательно, R имеет размерность *см*$^{-2}$. В результате находим, что k имеет размерность *см*^{3} · *г*$^{-1}$ · *сек*$^{-2}$. Её численное значение равно

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}. \qquad (92,2)$$

Заметим, что мы могли бы положить k равной единице (или другому произвольному безразмерному числу). При этом, однако, определился бы выбор единицы для измерения массы, которая совпадала бы в этом случае с единицей измерения длины [1]).

Вычислим, наконец, величину G в (92,1). Из выражения (91,10) для R_{ik} имеем:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\,g^{ik}R_{ik} =$$
$$= \sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right\}.$$

В первых двух членах справа имеем

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right),$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{il}\right) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\right).$$

---

[1]) Иногда полагают $k = c^2$; тогда масса измеряется в *см*, причём 1 *см* $= 1{,}35 \cdot 10^{28}$ *г*. Массу, измеренную в этих единицах, называют гравитационным радиусом тела.

Опуская полные производные, находим

$$\sqrt{-g}\,G=\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-$$
$$-(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})\,g^{ik}\sqrt{-g}.$$

С помощью формул (84,5) — (84,8) находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk}-\Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik}=$$
$$=g^{ik}(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li}-\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})=2g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}).$$

Окончательно имеем

$$G=g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}). \tag{92,3}$$

Величинами, определяющими гравитационное поле, являются компоненты метрического тензора. Поэтому в принципе наименьшего действия для гравитационного поля варьированию подлежат именно величины g_{ik}. Здесь необходимо, однако, сделать следующую существенную оговорку. Именно, мы не можем теперь утверждать, что в реально осуществляющемся поле интеграл действия имеет минимум (а не просто экстремум) по отношению ко всем возможным вариациям g_{ik}. Это связано с тем, что не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т. е. реальному изменению гравитационного поля. Компоненты g_{ik} меняются уже и при простом преобразовании координат, связанном лишь с переходом от одной системы к другой в одном и том же пространстве-времени. Каждое такое преобразование координат представляет собой, вообще говоря, совокупность четырёх (по числу координат) независимых преобразований. Для того чтобы исключить такие не связанные с изменением метрики изменения g_{ik}, можно наложить на них четыре дополнительных условия и потребовать выполнения этих условий при варьировании. Таким образом, в применении к гравитационному полю принцип наименьшего действия утверждает лишь, что можно наложить на g_{ik} такие дополнительные условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию g_{ik}[1]).

Имея в виду эти замечания, покажем теперь, что гравитационная постоянная должна быть положительной. В качестве указанных четырёх дополнительных условий, потребуем обращения в нуль трёх компонент $g_{0\alpha}$ и постоянства детерминанта $|g_{\alpha\beta}|$, составленного из

---

[1]) Подчеркнём, однако, что всё сказанное не влияет на вывод уравнений поля из принципа наименьшего действия (§ 94). Эти уравнения получаются уже в результате требования экстремума действия (т. е. исчезновения его первой вариации), а не обязательно минимума. Поэтому при их выводе можно подвергать варьированию все компоненты g_{ik} независимо.

компонент $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{0\alpha}=0, \quad |g_{\alpha\beta}| = \text{const}.$$

(в силу последнего из этих условий будем иметь $g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}|g_{\alpha\beta}|=0$). Нас интересуют здесь те члены в подинтегральном выражении в действии, которые содержат производные от g_{ik} по x^0 (ср. стр. 79). Простое вычисление с помощью (92,3) показывает, что такими членами в G являются

$$\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

Легко видеть, что эта величина существенно-положительна. Действительно, выбирая пространственную систему координат, которая была бы декартовой в данной точке пространства в данный момент времени (так что $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$), получим $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2$, т. е. сумму квадратов.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 (в промежутке между двумя пределами интегрирования по dx^0) можно, следовательно, сделать величину G сколь угодно большой. Если бы постоянная k была отрицательной, то действие при этом неограниченно уменьшалось бы (принимая сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения), т. е. не могло бы иметь минимума.

§ 93. Тензор энергии-импульса

В § 31 было получено общее правило для вычисления тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (31,1) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{93,1}$$

(в галилеевых координатах $g=-1$ и S переходит в $\int\Lambda\,dV\,dt$). Интегрирование производится по всему (трёхмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т. е. по бесконечной области 4-пространства, заключённой между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в § 31, тензор энергии-импульса, определённый по формуле (31,5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (31,5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, где ψ_{ikl} антисимметрично по индексам k и l. Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающей тем преимуществом, что он сразу приводит к правильному выражению.

Произведём в (90,1) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i = x^i - \xi^i$, где ξ^i—малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно общим формулам:

$$g^{ik}(x^l) = g'^{lm}(x'^l)\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = g'^{lm}\left(\delta^i_l - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$

$$\approx g'^{ik}(x'^l) + g'^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g'^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} — функцией прежних координат x^l. Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, в g'^{ik} подставим $x'^l = x^l - \xi^l$ и разложим $g'^{ik}(x^l - \xi^l)$ по степеням ξ^l. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, мы можем во всех членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо g'^{ik}. Таким образом, находим

$$g^{ik}(x^l) = g'^{ik}(x^l) - \xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Легко убедиться путём непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i. Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = -\xi^{i;k} - \xi^{k;i}. \tag{93,2}$$

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде. Пусть, как и в § 31, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q. Все эти члены всё равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путём приравнивания нулю вариации S по величинам q. Поэтому достаточно писать только члены связанные с изменением g_{ik}. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим δS в виде[1])

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial \sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g}\Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial \sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial \sqrt{-g}\Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega.$$

[1]) Необходимо подчеркнуть, что введенное нами обозначение производных по компонентам симметрического тензора g_{ik} имеет, в некотором смысле,

Введём теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}; \tag{93,3}$$

тогда δS примет вид[1])

$$\delta S = -\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{93,4}$$

(замечаем, что $g^{ik}\delta g_{lk} = -g_{lk}\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik} = -T_{ik}\delta g^{ik}$). Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (93,2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik},

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k} + \xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Далее, преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int (T_i^k\xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\int T_{i;k}^k\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{93,5}$$

Первый интеграл с помощью (84,9) может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}T_i^k\xi^i)\,d\Omega$$

и преобразован в интеграл на гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает.

Таким образом, приравнивая δS нулю, находим

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T_{i;k}^k\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega = 0.$$

символический характер. Именно, производные $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$ (F — некоторая функция от g_{ik}) имеют, по существу, смысл лишь как выражающие тот факт, что $dF = \frac{\partial F}{\partial g^{ik}}dg^{ik}$. Но в сумму $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}dg_{ik}$ члены с дифференциалами dg_{ik} каждой из компонент с $i \neq k$ симметрического тензора входят дважды. Поэтому при дифференцировании конкретного выражения F по какой-либо определённой компоненте g_{ik} с $i \neq k$ мы получили бы величину, вдвое большую, чем то, что мы обозначаем посредством $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$. Это замечание необходимо иметь в виду, если придавать определённые значения индексам i, k в формулах, в которые входят производные по $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$.

[1]) Обращаем внимание на то, что в рассматриваемом случае десять величин δg_{ik} не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства δS нулю отнюдь не следует, что $T_{ik} = 0$. Заметим также, что выражение (93,4) для δS справедливо при любом варьировании g_{ik}.

Ввиду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T_{i;k}^{k}=0. \tag{93,6}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (31,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k}=0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik}, определяемый формулой (93,3), должен быть отождествлён с тензором энергии-импульса, — по крайней мере с точностью до постоянного множителя. Легко проверить, производя, например, вычисление по формуле (93,3) для электромагнитного поля $\left(\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik}=\right.$ $\left.=-\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{lm}g^{il}g^{km}\right)$, что этот множитель равен единице, т. е. что T_{ik} из (93,3) есть в точности тензор энергии-импульса[1]).

Таким образом, формула (93,3) даёт возможность вычислить тензор энергии-импульса путём дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производных). При этом тензор T_{ik}, определённый по (93,3), является, очевидно, симметричным. Формула (93,3) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельно смысла и переход к криволинейным координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik}.

Выражение (32,1) для тензора энергии-импульса электромагнитного поля должно быть написано в криволинейных координатах в виде

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_k{}^l-\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right),$$

или, для компонент смешанного тензора:

$$T_i^k=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F^{kl}-\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}\delta_i^k\right). \tag{93,7}$$

Аналогично, ковариантные компоненты тензора энергии-импульса макроскопических тел (34,2) равны

$$T_{ik}=(p+\varepsilon)u_iu_k+pg_{ik},$$

а смешанные:

$$T_i^k=(p+\varepsilon)u_iu^k+p\delta_i^k. \tag{93,8}$$

---

[1]) В галилеевых координатах $T_{00}=T^{00}=-T_0^0$ есть плотность энергии, а $\frac{1}{c}T_\alpha^0=-\frac{1}{c}T_{0\alpha}=\frac{1}{c}T^{0\alpha}$ — плотность компонент импульса; величины же $T_\alpha^\beta=T_{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}$ составляют тензор плотности потока импульса.

Отметим, что величина T_{00} всегда положительна[1]):

$$T_{00} \geqslant 0. \tag{93,9}$$

О компоненте же T_0^0 этого, вообще говоря, нельзя сказать.

§ 94. Уравнения гравитационного поля

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений гравитационного поля. Эти уравнения получаются из принципа наименьшего действия $\delta(S_m + S_g) = 0$, где S_g и S_m — действия соответственно для гравитационного поля и материи. Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т. е. величины g_{ik}.

Вычислим вариацию δS_g. Мы имеем:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left\{ R_{ik} \sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g}\, \delta R_{ik} \right\} d\Omega .$$

Из формулы (84,4) получим

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik};$$

подставляя это, находим

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega . \tag{94,1}$$

Для вычисления δR_{ik} заметим, что хотя величины Γ^i_{kl} и не составляют тензора, но их вариации $\delta\Gamma^i_{kl}$ образуют тензор. Действительно, $\Gamma^k_{il} A_k dx^l$ есть изменение вектора при параллельном переносе [см. (83,5)] из некоторой точки P в бесконечно близкую к ней P'. Поэтому $\delta\Gamma^k_{il} A_k dx^l$ есть разность двух векторов, получающихся соответственно при двух параллельных переносах (с неварьированными и варьированными Γ^i_{kl}) из точки P в одну и ту же точку P'. Разность же двух векторов в одной и той же точке является вектором, а потому $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор.

---

[1]) Действительно, имеем $T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p\,(u_0^2 + g_{00})$. Первый член во всяком случае положителен. Во втором же члене пишем $u_0 = g_{00}u^0 + g_{0\alpha}u^\alpha = \frac{g_{00}dx^0 + g_{0\alpha}dx^\alpha}{ds}$ и после простого преобразования получим $p\left(\frac{dl}{ds}\right)^2$, где dl — элемент пространственного расстояния (82,5); отсюда видно, что и второй член в T_{00} положителен.

Воспользуемся системой координат, галилеевой в данной точке. Тогда в этой точке все $\Gamma^i_{kl}=0$. С помощью выражения (91,10) для R_{ik} имеем (помня, что первые производные от g^{ik} равны теперь нулю):

$$g^{ik}\delta R_{ik}=g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right\}=g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik}=\frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

где

$$w^l=g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}.$$

Поскольку w^l есть вектор, то мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,w^l)$$

[заменяя $\frac{\partial w^l}{\partial x^l}$ на $w^l_{;l}$ и пользуясь (84,9)]. Следовательно, второй интеграл справа в (94,1) равен

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\int\frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}d\Omega$$

и по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объём. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает. Таким образом, вариация δS_g равна[1])

$$\delta S_g=\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (94,2)$$

Заметим, что если бы мы исходили из выражения

$$S_g=-\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

для действия поля, то мы получили бы, как легко убедиться,

$$\delta S_g=-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ki}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

---

[1]) Отметим здесь следующее любопытное обстоятельство. Если вычислять вариацию $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ [с R_{ik} из (91,10)], рассматривая Γ^i_{kl} как независимые переменные, а g_{ik} — как постоянные, после чего воспользоваться выражениями (84,3) для Γ^i_{kl}, то мы получили бы, как легко убедиться, тождественно нуль. Обратно, можно было бы определить связь между Γ^i_{kl} и метрическим тензором, если потребовать обращения указанной вариации в нуль.

Сравнивая это с (94,2), находим следующее соотношение:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \qquad (94,3)$$

Для вариации действия материи мы можем написать непосредственно на основании (90,4):

$$\delta S_m=-\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (94,4)$$

где T_{ik} — тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле). Гравитационное взаимодействие играет роль только для тел с достаточно большой массой (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому при исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами. Соответственно этому для T_{ik} надо обычно писать выражение (93,8). Если же гравитационное поле создаётся электромагнитным излучением в пустоте, то для T_i^k надо было бы воспользоваться выражением (93,7). Необходимо, однако, иметь в виду, что плотность энергии существующего в природе свободного излучения очень мала по сравнению с плотностями энергии материальных тел, включающими в себя их энергию покоя. Поэтому рассмотрение гравитационного поля, создаваемого электромагнитным полем в отсутствии масс, не представляет особого интереса.

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m+\delta S_g=0$ мы находим с помощью соотношений (94,2) и (94,4):

$$\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R-\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

откуда ввиду произвольности δg^{ik}:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \qquad (94,5)$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R=\frac{8\pi k}{c^4}T_i^k. \qquad (94,6)$$

Это и есть искомые уравнения гравитационного поля — основные уравнения общей теории относительности.

Упрощая (94,6) по индексам i и k, находим $R=-\frac{8\pi k}{c^4}T$ ($T=T_i^i$). Поэтому уравнения поля можно написать также в виде

$$R_{ik}=\frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right). \qquad (94,7)$$

Отметим, что уравнения гравитационного поля являются уравнениями нелинейными. Поэтому для гравитационных полей несправедлив принцип суперпозиции, в отличие от того, что имеет место для электромагнитного поля в специальной теории относительности (§ 26).

Надо, впрочем, иметь в виду, что практически приходится обычно иметь дело со слабыми гравитационными полями, для которых уравнения поля в первом приближении линейны (см. следующий параграф); для таких полей в том же приближении справедлив и принцип суперпозиции.

В пустом пространстве $T_{ik}=0$, и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik}=0. \tag{94,8}$$

Напоминаем, что это отнюдь не значит, что пустое пространство-время является плоским, — для этого требовалось бы, чтобы $R^i_{klm}=0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает тем свойством, что $T^i_i=0$ [см. (32,2)]. Поскольку, с другой стороны, $R=-\frac{8\pi k}{c^4}T$, то, следовательно, при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю ($R=0$).

Как мы знаем, дивергенция $T^k_{i;\,k}$ тензора T^k_i равна нулю (§ 93); поэтому должна быть равной нулю и дивергенция левой части уравнения (94,6). Легко убедиться в том, что действительно имеет место тождество

$$R^k_{i;\,k}-\frac{1}{2}(\delta^k_i R)_{;k}=R^k_{i;\,k}-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}=0. \tag{94,9}$$

Оно вытекает непосредственно из тождества (91,9) при умножении последнего на $g^{ik}\delta^l_n$.

Таким образом, уравнения $T^k_{i;\,k}$, по существу, содержатся в уравнениях поля (94,6). С другой стороны, уравнения $T^k_{i;k}=0$, выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к которой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса (т. е. уравнения движения материальных частиц или вторую пару уравнений Максвелла). Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи (материальных частиц и электромагнитного поля), которая создаёт это поле. В противоположность этому, уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения создающих поле зарядов.

Поэтому в случае электромагнитного поля распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным; заданием этого распределения зарядов определяется тогда посредством уравнения Максвелла создаваемое ими поле. В гравитационном же поле распределение и движение создающей его материи отнюдь не могут быть заданы произвольным образом, — напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Необходимо, однако, отметить, что уравнения гравитационного поля не определяют распределения и движения материи целиком. Именно, эти уравнения не содержат в себе уравнения состояния вещества, т. е. уравнения, связывающего между собой давление и плотность. Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля.

Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию. Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора g_{ik}. Поэтому независимыми являются только шесть величин g_{ik}. Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости u^i связаны друг с другом соотношением $u^i u_i = -1$, так что независимыми являются только три из них. Таким образом, десять уравнений поля (94,5) действительно определяют десять неизвестных величин, именно, шесть компонент g_{ik}, три компоненты u^i и плотность ρ материи (или её давление p).

Исключая из уравнений (94,5) четыре неизвестных — скорость и плотность, можно получить шесть уравнений, определяющих шесть величин g_{ik}. То, что для g_{ik} имеется всего шесть уравнений, видно и непосредственно из того, что 10 уравнений (94,5) связаны друг с другом четырьмя тождествами $T^k_{i;k} = 0$.

Задача

Написать уравнения стационарного гравитационного поля.

Решение. Вводим обозначения $g_{00} = -h$ и $g_{0\alpha} = hg_\alpha$. Тогда $g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - hg_\alpha g_\beta$, где $\gamma_{\alpha\beta}$ — пространственный (трёхмерный) метрический тензор (82,6). Ниже все операции поднимания и опускания индексов и ковариантного дифференцирования производятся в трёхмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ (как и в задаче к § 91). Вводим также трёхмерный антисимметричный тензор

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} \equiv \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}$$

и трёхмерную скорость v^α, определив её как

$$\frac{v^\alpha}{c} = \frac{dx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0 - g_\alpha\, dx^\alpha)}.$$

В результате вычисления компонент тензоров R_{ik} и T_{ik} получаются следующие уравнения[1]):

$$\frac{1}{2h}h^{;\alpha}_{;\alpha}-\frac{1}{4h^2}h_{;\alpha}h^{;\alpha}+\frac{h}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}=\frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{\varepsilon+p}{1-\frac{v_\alpha v^\alpha}{c^2}}-\frac{\varepsilon-p}{2}\right],$$

$$\frac{\sqrt{h}}{2}f^{\beta\alpha}{}_{;\beta}+\frac{3}{4\sqrt{h}}f^{\beta\alpha}h_{;\beta}=-\frac{8\pi k}{c^4}\frac{p+\varepsilon}{1-\frac{v_\alpha v^\alpha}{c^2}}\cdot,$$

$$P^\alpha_\beta+\frac{h}{2}f^{\alpha\gamma}f_{\beta\gamma}-\frac{1}{2h}h^{;\alpha}_{;\beta}+\frac{1}{4h^2}h^{;\alpha}h_{;\beta}=$$

$$=\frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{\varepsilon-p}{2}\delta^\alpha_\beta+\frac{(p+\varepsilon)v^\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v_\alpha v^\beta}{c^2}\right)}\right]$$

(P^α_β—трёхмерный тензор, выражающийся через $\gamma_{\alpha\beta}$, так же, как R^k_i выражается через g_{ik}).

§ 95. Закон Ньютона

Произведём в полученных нами уравнениях гравитационного поля предельный переход к нерелятивистской механике. Как было указано в § 86, предположение о малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым.

Выражение для компоненты g_{00} метрического тензора (единственной, которая нам понадобится) в рассматриваемом предельном случае было найдено в § 86:

$$g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2}.$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (34,4) $T^k_i=\mu c^2 u_i u^k$, где μ — плотность массы тела (сумма масс частиц в единице объёма). Что касается 4-скорости u^i, то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми её пространственными компонентами, оставив только временную, т. е. должны

---

[1]) Вычисление может быть облегчено, если заметить заранее, что окончательные уравнения могут содержать лишь производные от вектора g_α в комбинации $f_{\alpha\beta}$, а не самый этот вектор. Действительно, уравнения должны быть инвариантными по отношению к преобразованию временной координаты вида $x^0\to x^0+\varphi(x^\alpha)$, не меняющему стационарности поля. Но при таком преобразовании g_α переходит в $g_\alpha+\varphi_{;\alpha}$; тензор же $f_{\alpha\beta}$, очевидно, не меняется.

положить $u^\alpha = 0$, $u^0 = -u_0 = 1$. Из всех компонент T_i^k остаётся, таким образом, только

$$T_0^0 = -\mu c^2. \tag{95,1}$$

Скаляр $T = T_i^i$ будет равен той же величине $-\mu c^2$.

Уравнения поля мы напишем в форме (94,7):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right);$$

при $i = k = 0$

$$R_0^0 = -\frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

Все остальные уравнения, как легко убедиться, в рассматриваемом приближении тождественно обращаются в нуль.

При вычислении R_0^0 по общей формуле (91,10) замечаем, что члены, содержащие произведения величин Γ_{kl}^i, во всяком случае являются величинами второго порядка малости по φ. Члены же, содержащие производные по $x^0 = ct$, являются малыми (по сравнению с членами с производными по координатам x^α) как содержащие лишние степени от $1/c$. В результате остаётся $R_{00} = -R_0^0 = \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha}$. Подставляя $\Gamma_{00}^\alpha \cong -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$, находим

$$R_0^0 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv -\frac{1}{c^2}\Delta\varphi.$$

Таким образом, уравнения поля переходят в уравнение

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu. \tag{95,2}$$

Уравнение (95,2) является уравнением гравитационного поля в нерелятивистской механике. Обращаем внимание на то, что оно полностью аналогично уравнению Пуассона (35,4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$. Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (95,2) по аналогии с (35,8) в виде

$$\varphi = -k\int \frac{\mu\, dV}{R}. \tag{95,3}$$

Эта формула определяет в нерелятивистском приближении потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем

$$\varphi = -\frac{km}{R} \tag{95,4}$$

и, следовательно, сила $F=-m'\frac{\partial\varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F=-\frac{kmm'}{R^2}. \tag{95,5}$$

Это — известный закон тяготения Ньютона[1]).

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна её массе, умноженной на потенциал поля (§ 88), аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля. Поэтому мы можем написать по аналогии с (36,1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U=-\frac{k}{2}\int\mu\varphi\,dV. \tag{95,6}$$

Для ньютоновского потенциала постоянного гравитационного поля вдали от создающих его масс можно написать разложение, аналогичное тому, которое было получено в §§ 39—40 для электростатического поля. Выберем начало координат в центре инерции масс. Тогда интеграл $\int\mu\mathbf{r}\,dV$, аналогичный дипольному моменту системы зарядов, тождественно обратится в нуль. Таким образом, в отличие от электростатического поля, в гравитационном поле всегда можно исключить «дипольный член». Разложение потенциала φ имеет, следовательно, вид

$$\varphi=-k\left\{\frac{M}{R_0}+\frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}+\ldots\right\}, \tag{95,7}$$

где $M=\int\mu\,dV$ — полная масса системы, а величины

$$D_{\alpha\beta}=\int\mu\,(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})\,dV \tag{95,8}$$

можно назвать тензором квадрупольного момента масс[2]). Они связаны с обычным тензором моментов инерции

$$J_{\alpha\beta}=\int\mu\,(r^2\delta_{\alpha\beta}-x_\alpha x_\beta)\,dV$$

очевидными соотношениями

$$D_{\alpha\beta}=J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}-3J_{\alpha\beta}. \tag{95,9}$$

---

[1]) Из (95,5) видно, что отношение гравитационных сил к электромагнитным у элементарных частиц весьма ничтожно. Так для двух электронов отношение $\frac{km^2}{e^2}$ равно $2\cdot10^{-43}$, а для двух протонов — $7\cdot10^{-37}$.

[2]) Мы пишем здесь все индексы α, β внизу, не делая различия между ко- и контравариантными компонентами, соответственно тому, что подразумеваются операции в обычном ньютоновском (эвклидовом) пространстве.

§ 96. Центрально-симметрическое гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться любым центрально-симметрическим распределением вещества; при этом, конечно, центрально-симметрическим должно быть не только распределение вещества, но и его движение, т. е. скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу.

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени, т. е. выражение для интервала ds, должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В эвклидовом пространстве это расстояние равно радиус-вектору; в неэвклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами эвклидова радиус-вектора (например, одновременно равной расстоянию до центра и делённой на 2π длине окружности). Поэтому выбор «радиус-вектора» является теперь произвольным.

Если пользоваться «сферическими» пространственными координатами r, θ, φ, то наиболее общим центрально-симметрическим выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r, t)\,dr^2 + k(r, t)(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r, t)\,dt^2 + a(r, t)\,dr\,dt, \qquad (96,1)$$

где a, h, k, l — некоторые функции от «радиус-вектора» r и «времени» t. Но, ввиду произвольности в выборе системы отсчёта в общей теории относительности, мы можем ещё подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул $r = f_1(r', t')$, $t = f_2(r', t')$, где f_1, f_2 — любые функции от новых координат r', t'.

Воспользовавшись этой возможностью, мы выберем координату r и время t таким образом, чтобы, во-первых, коэффициент $a(r, t)$ при $dr\,dt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль и, во-вторых, коэффициент $k(r, t)$ был равен просто r^2 [1]). Последнее означает, что радиус-вектор r определён таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$ (элемент дуги окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ равен $dl = r\,d\varphi$). Величины h и l нам будет удобно писать в экспоненциальном виде, соответственно как $-e^{\lambda}$ и c^2e^{ν}, где λ и ν — некоторые функции от r и t. Таким образом, получим для ds^2 следующее выражение:

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) - e^{\lambda}\,dr^2. \qquad (96,2)$$

---

[1]) Надо отметить, что это условие не определяет выбора временной координаты однозначным образом. Именно, она может ещё быть подвергнута любому преобразованию вида $t = f(t')$, не содержащему r.

Подразумевая под x^1, x^2, x^3, x^0 соответственно координаты r, θ, φ, ct, мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора выражения

$$g_{11}=e^{\lambda}, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta, \quad g_{00}=-e^{\nu}.$$

Очевидно, что

$$g^{11}=e^{-\lambda}, \quad g^{22}=r^{-2}, \quad g^{33}=r^{-2}\sin^{-2}\theta, \quad g^{00}=-e^{-\nu}.$$

С помощью этих значений легко вычислить по формуле (84,3) величины Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой — дифференцирование по ct):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2}, && \Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2}, && \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^0_{11}=\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}, && \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda}, && \Gamma^1_{00}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},\\
&\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r}, && \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta, && \Gamma^0_{00}=\frac{\dot\nu}{2}.\\
&\Gamma^1_{10}=\frac{\dot\lambda}{2}, && \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}, &&
\end{aligned} \tag{96,3}$$

Все остальные компоненты Γ^i_{kl} (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Для составления уравнений гравитации надо вычислить по формуле (91,10) компоненты тензора R^i_k. Простые, но довольно длинные вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{96,4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2=\frac{8\pi k}{c^4}T^3_3=$$
$$=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right), \tag{96,5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{96,6}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0=e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}. \tag{96,7}$$

Остальные компоненты тождественно обращаются в нуль.

Уравнения гравитации могут быть полностью проинтегрированы для весьма важного случая центрально-симметрического поля в пустоте, т. е. вне создающих его масс (Шварцшильд, 1916). Полагая тензор энергии-импульса равным нулю, получим следующие уравнения:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0, \tag{96,8}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0, \tag{96,9}$$

$$\dot{\lambda}=0 \tag{96,10}$$

[четвёртое уравнение, т. е. уравнение (96,5), можно не выписывать, так как оно является следствием трёх остальных уравнений].

Из (96,10) мы сразу видим, что λ не зависит от времени. Далее, складывая уравнения (94,8) и (94,9), находим $\lambda'+\nu'=0$, т. е.

$$\lambda+\nu=f(t), \tag{96,11}$$

где $f(t)$ — функция только от времени. Но выбрав интервал ds^2 в виде (96,2), мы оставили за собой ещё возможность произвольного преобразования времени вида $t=f(t')$ (см. примечание на стр. 317). Такое преобразование эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, и с его помощью можно всегда обратить $f(t)$ в (96,11) в нуль. Итак, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\lambda+\nu=0$, т. е. $\lambda=-\nu$. Отметим, что, таким образом, центрально-симметрическое гравитационное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.

Уравнение (96,9) легко интегрируется и даёт:

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{\text{const.}}{r}.$$

Отметим интересное обстоятельство, что на бесконечности ($r\to\infty$) $e^{-\lambda}=e^{\nu}=1$, т. е. вдали от гравитирующих тел, метрика автоматически оказывается галилеевой. Постоянную const. легко выразить через массу тела, потребовав, чтобы на больших расстояниях, где поле слабо, имел место закон Ньютона. Именно, мы должны иметь $g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2}$ [см. (86,2)], где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению (95,4): $\varphi=-\frac{km}{r}$ (m — полная масса создающего поле тела). Отсюда видно, что const. $=\frac{2km}{c^2}$.

Таким образом, для интервала ds окончательно находим

$$ds^2=\left(c^2-\frac{2km}{r}\right)dt^2-r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2+d\theta^2)-\frac{dr^2}{1-\frac{2km}{c^2r}}. \tag{96,12}$$

Это выражение полностью определяет гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметрическим распределением масс. Подчёркиваем, что это решение имеет место не только для покоящихся масс, но и для движущихся, если только это движение тоже обладает центральной симметрией (например, центрально-симметрические пульсации).

Пространственная метрика определяется выражением для элемента пространственного расстояния:

$$dl^2 = r^2(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + \frac{dr^2}{1 - \frac{2km}{c^2 r}} \qquad (96,13)$$

[компоненты тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ (82,6) совпадают здесь, очевидно, с соответствующими компонентами $g_{\alpha\beta}$]. Расстояние от центра до какой-либо точки пространства равно $\int\limits_0^r \sqrt{g_{11}}dr$ и поскольку $g_{11} \geqslant 1$, то

$$\int\limits_0^r \sqrt{g_{11}}\,dr \geqslant r$$

(знак равенства имеет место только для точек на бесконечности). Длина же окружности, проведённой через рассматриваемую точку (с центром в начале координат), равна $2\pi r$. Мы видим, следовательно, что отношение длины окружности к её радиусу оказывается меньшим, чем 2π.

Далее, из (96,12) мы видим, что $-g_{00} \leqslant 1$. В связи с формулой (82,1) $d\tau = \sqrt{-g_{00}}\,dt$, определяющей истинное время, отсюда следует, что

$$d\tau \leqslant dt.$$

Знак равенства имеет место на бесконечности, где t совпадает с истинным временем. Таким образом, на конечных расстояниях от масс происходит «замедление» времени по сравнению со временем на бесконечности. Иначе говоря, смещение спектральных линий в гравитационном поле (см. § 88) происходит в красную сторону.

Компонента g_{00} должна быть, как мы знаем, отрицательной. Из (96,12) мы видим поэтому, что «радиус-вектор» r не может принимать значений, меньших, чем $2km/c^2$. Соответствующая минимальная длина окружности равна $2\pi \cdot 2km/c^2 = 4\pi km/c^2$. Это значит, что материальное тело не может обладать размером, меньшим некоторого определённого нижнего предела. Именно, тело с массой m не может иметь в окружности длину меньше, чем $4\pi km/c^2$ [1]).

---

[1]) Обращаем внимание на то, что этот результат не имеет смысла в применении к элементарным частицам. По отношению к этим частицам вся излагаемая в этой книге теория поля благодаря квантовым явлениям теряет, как отмечалось, свою применимость уже для размеров, в огромное количество раз (порядка 10^{40}) превышающих km/c^2.

Наконец приведём ещё приближённое выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r}(dr^2 - c^2 dt^2). \tag{96,14}$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевской метрике ds_0^2. На больших расстояниях от создающих поле масс всякое поле является центрально-симметрическим. Поэтому (96,14) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел.

Некоторые общие соображения можно высказать и по поводу центрально-симметрического гравитационного поля внутри гравитирующих масс. Из уравнения (96,6) видно, что при $r \to 0$ λ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере как r^2; в противном случае правая часть уравнения обратилась бы при $r \to 0$ в бесконечность, т. е. и T_0^0 имело бы в $r=0$ особую точку, что физически нелепо. Интегрируя формально уравнение (96,6) с граничным условием $\lambda|_{r=0} = 0$, получим

$$\lambda = -\ln\left\{1 + \frac{8\pi k}{c^4 r}\int\limits_0^r T_0^0 r^2\, dr\right\}. \tag{96,15}$$

Поскольку $T_0^0 = -e^\nu T_{00} \leqslant 0$ [см. (93,9)], то отсюда видно, что $\lambda \geqslant 0$, т. е.

$$e^\lambda \geqslant 1. \tag{96,16}$$

Имея в виду это неравенство и неравенство

$$T_1^1 = p + (p + \varepsilon)(u^1)^2 e^\lambda \geqslant 0,$$

находим из уравнения (96,4), что $\nu' \geqslant 0$. Но при $r \to \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т. е. $e^\nu \to 1$, $\nu \to 0$. Поэтому из $\nu' \geqslant 0$ следует, что во всём пространстве $\nu \leqslant 0$, т. е.

$$e^\nu \leqslant 1. \tag{96,17}$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства пространственной метрики и хода часов в центрально-симметрическом поле в пустоте, относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Если гравитационное поле создаётся сферическим телом «радиуса» a, то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (96,14) поэтому даёт

$$\lambda = -\ln\left\{1 + \frac{8\pi k}{c^4 r}\int\limits_0^a T_0^0 r^2\, dr\right\}.$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (96,12), согласно которому

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Сравнивая оба выражения, найдём формулу

$$m = -\frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2\,dr, \tag{96,18}$$

определяющую полную массу тела по его тензору энергии-импульса.

Задачи

1. Определить пространственную кривизну в центрально-симметрическом гравитационном поле в пустоте.

Решение. Пространственный тензор кривизны (обозначим его как $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$) выражается через пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R^{i}_{klm} выражается через g_{ik}. Компоненты тензора $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через компоненты тензора $P_{\alpha\beta} = P^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$ (и $\gamma_{\alpha\beta}$), так что достаточно вычислить $P_{\alpha\beta}$ (§ 91). Со значениями $\gamma_{\alpha\beta}$ из (96,13) получим после вычисления следующие значения компонент тензора:

$$P_{\theta}^{\theta} = P_{\varphi}^{\varphi} = \frac{km}{c^2 r^3}, \quad P_r^r = -\frac{2km}{c^2 r^3}.$$

и $P^{\alpha}_{\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, так что тензор P_{α}^{β} оказывается приведённым к главным осям. Обращаем внимание на то, что P_{θ}^{θ}, P_{φ}^{φ} положительны, а P_r^r отрицательно. Это значит, что пространственная геометрия такова, что в «плоскостях», проходящих через начало координат, сумма углов треугольника больше чем π, а в «плоскостях», «перпендикулярных» радиус-векторам, — меньше чем π.

2. Определить форму поверхности вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат «плоскости» в центрально-симметрическом гравитационном поле в пустоте.

Решение. Геометрия на поверхности вращения $z = z(r)$ (в цилиндрических координатах) определяется элементом длины:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2\,(1 + z'^2) + r^2 d\varphi^2.$$

Сравнивая с элементом длины в «плоскости» $\theta = \pi/2$ в рассматриваемом поле

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2mk}{c^2 r}},$$

находим

$$1 + z'^2 = \left(1 - \frac{2mk}{c^2 r}\right)^{-1},$$

откуда

$$z = 2\sqrt{\frac{2mk}{c^2}}\sqrt{r - \frac{2mk}{c^2}}.$$

3. Преобразовать интервал (96,12) к таким координатам, в которых элемент dl пространственного расстояния пропорционален своему эвклидовому выражению.

Решение. Полагая

$$r = \left(1 + \frac{mk}{2c^2 r_1}\right)^2 r_1,$$

получим из (96,12)

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \dfrac{km}{2c^2 r_1}}{1 + \dfrac{km}{2c^2 r_1}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{km}{2c^2 r_1}\right)^4 (dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).$$

Координаты r_1, θ, φ называют изотропными сферическими координатами.

4. Вывести уравнения центрально-симметрического гравитационного поля в системе координат, движущейся в каждой точке вместе с веществом, находящимся в этой же точке (такую систему отсчёта можно назвать «собственной»).

Решение. Двумя возможными преобразованиями координат r, t в элементе интервала (96,1) воспользуемся для того, чтобы, во-первых, обратить в нуль коэффициент $a\,(r,\,t)$ при $dr\,dt$ и, во-вторых, обратить в каждой точке в нуль радиальную скорость вещества $\dot{r}$ (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии). После этого координаты r и t могут ещё быть подвергнуты произвольному преобразованию вида $r = r(r')$, $t = t(t')$.

Обозначая h, k, l соответственно как $-e^{\lambda}$, $-e^{\mu}$, c^2e^{ν} (λ, μ, ν — функции от r и t), будем иметь выражение для ds^2 в виде

$$ds^2 = e^{\nu}c^2\,dt^2 - e^{\mu}\,(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) - e^{\lambda}\,dr^2. \tag{1}$$

Компоненты тензора энергии-импульса материи равны

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p, \qquad T_0^0 = -\varepsilon. \tag{2}$$

Довольно длинное вычисление приводит к следующим уравнениям гравитации:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4}p = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \tag{3}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4}p = \frac{1}{4}e^{-\lambda}\,(2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') +$$
$$+ \frac{1}{4}e^{-\nu}\,(\dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\mu}\dot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \tag{4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = -\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) - e^{-\mu}, \tag{5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^1 = 0 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\,(-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\lambda}\mu' + \nu'\dot{\mu}). \tag{6}$$

Некоторые общие соотношения для λ, μ, ν могут быть легко найдены если исходить из содержащихся в уравнениях гравитации уравнений (93,6)

$T^k_{i;k}=0$. Подставляя T^k_i и g_{ik} из (1) и (2), получим следующие два уравнения:

$$\dot\lambda+2\dot\mu=-\frac{2\dot\varepsilon}{p+\varepsilon},\quad \nu'=-\frac{2p'}{p+\varepsilon}.$$

Если p есть определённая функция энергии ε, то эти уравнения непосредственно интегрируются в виде

$$\lambda+2\mu=-2\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+f_1(r),\tag{7}$$

$$\nu=-2\int\frac{dp}{p+\varepsilon}+f_2(t),\tag{8}$$

где функции $f_1(r)$ и $f_2(t)$ могут быть выбраны произвольно ввиду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $r=r(r')$ и $t=t(t')$.

5. Найти общее решение уравнений центрально-симметрического гравитационного поля при равном нулю давлении p вещества (Б. Датт, 1937).

Решение. Пользуемся «собственной» системой отсчёта (см. задачу 4). Из формулы (8) видно, что при $p=0$ можно положить $\nu=0$. Тогда уравнение (6) непосредственно интегрируется по времени и даёт

$$e^{\lambda}=\frac{e^{\mu}\mu'^2}{4(f+1)},\tag{1}$$

где $f=f(r)$ — произвольная функция от r (удовлетворяющая только условию $1+f>0$). Подставляя это выражение в уравнение (3) задачи 4, получим уравнение

$$\ddot\mu+\frac{3}{4}\dot\mu^2-fe^{-\mu}=0.$$

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\frac{\dot\mu^2}{4}=fe^{-\mu}+Fe^{-3\mu/2},$$

где $F=F(r)$ — ещё одна произвольная функция. Интегрируя ещё раз, получим

$$\left.\begin{aligned}&\text{при } f>0:\\ &ct=\frac{1}{f}\sqrt{fe^{\mu}+Fe^{\mu/2}}-\frac{F}{f^{3/2}}\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{fe^{\mu/2}}{F}}+\Phi(r),\\ &\text{при } f<0:\\ &ct=\frac{1}{f}\sqrt{fe^{\mu}+Fe^{\mu/2}}-\frac{F}{(-f)^{3/2}}\arcsin\sqrt{-\frac{fe^{\mu/2}}{F}}+\Phi(r).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Для ε получим, подставляя полученные выражения в уравнение (5) задачи 4:

$$\frac{4\pi k}{c^4}\varepsilon=\frac{F'}{f'}e^{-\frac{3\mu}{2}}.\tag{3}$$

Формулы (1—3) определяют искомое общее решение. Заметим, что оно зависит по существу не от трёх, а всего от двух произвольных функций, определяющих связь между f, F, Φ, поскольку сама координата r может ещё быть выбрана произвольным образом (выбор времени t стал однозначным после того, как мы положили $\nu=0$).

§ 97. Движение в центрально-симметрическом гравитационном поле

Рассмотрим движение тела в центрально-симметрическом гравитационном поле. Как и во всяком центрально-симметрическом поле, движение будет происходить в одной «плоскости», проходящей через начало координат; выберем эту плоскость в качестве плоскости $\theta = \pi/2$.

Для определения траектории тела (с массой m) воспользуемся уравнением Гамильтона-Якоби:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} + m^2c^2 = 0.$$

С помощью g^{ik}, определяемых выражением (96,12) для интервала, находим следующее уравнение:

$$e \quad \left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - e^{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0, \tag{97,1}$$

где

$$e^{\nu} = 1 - 2km'/c^2r \tag{97,2}$$

(m' — масса тела, создающего поле). По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби, ищем S в виде

$$S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + f(r)$$

с постоянными энергией $\mathscr{E}_0$ и моментом импульса M. Подставляя это в (97,1), находим уравнение

$$e^{-\nu}\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - \frac{M^2}{r^2} - e^{\nu}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = m^2c^2,$$

откуда

$$\frac{df}{dr} = e^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{r^2}}.$$

Таким образом, действие равно

$$S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + \int e^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{r^2}}\,dr. \tag{97,3}$$

Траектория определяется, как известно, уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const.}$, откуда

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{r^2}e^{\nu}}}. \tag{97,4}$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому.

Примером движения в центрально-симметрическом гравитационном поле является движение планет в поле тяготения солнца. Поскольку скорости планет малы по сравнению со скоростью света, то релятивистская теория тяготения приводит лишь к очень незначительным поправкам для орбит планет по сравнению с теорией Ньютона.

Для приближённого исследования уравнения орбиты (97,4) удобно написать его в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{M}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{r^2}e^{\nu}$$

или, вводя новую переменную $\sigma = 1/r$ и подставляя выражение для e^{ν}:

$$M^2c^2\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \mathscr{E}_0^2 - m^2c^4 + 2km'm^2c^2\sigma - M^2c^2\sigma^2 + 2km'M^2\sigma^3.$$

Дифференцируя это уравнение по φ, получаем

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha\sigma^2, \tag{97,5}$$

где введены постоянные $p = \dfrac{M^2}{km'm^2}$, $\alpha = \dfrac{3km'}{c^2}$.

Это уравнение отличается от того, которое получилось бы в ньютоновской теории, наличием малого члена $\alpha\sigma^2$. Будем решать его методом последовательных приближений. В нулевом приближении опускаем член $\alpha\sigma^2$. Оставшееся уравнение имеет, как известно, в качестве решения ньютоновскую орбиту

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi),$$

где p — параметр орбиты, а e — её эксцентриситет; большая полуось равна $a = p/(1 - e^2)$, а перигелий орбиты соответствует значению угла $\varphi = \pi$.

В следующем приближении мы ищем σ в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, где σ_0 — нулевое приближение. Подставляя $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ в (97,5), находим для σ_1 уравнение

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \alpha\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{p^2}(1 + e\cos\varphi)^2 =$$
$$= \frac{\alpha}{p^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right].$$

Из всех членов в скобке справа к наблюдаемому изменению орбиты приводит только второй, — благодаря резонансу (с решением однородного уравнения $\dfrac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = 0$) он приводит к непрерывно растущему эффекту. Оставляя только этот член, находим для σ_1 частный интеграл неоднородного уравнения:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi.$$

Таким образом, в искомом приближении

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\left(1 + e\cos\varphi + \frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi\right) \approx \frac{1}{p}\left[1 + e\cos\varphi\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)\right]. \qquad (97,6)$$

Мы видим отсюда, что ньютоновский эллипс вращается; за время одного оборота планеты перигелий её орбиты смещается на [1])

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\alpha}{p} = \frac{6\pi k m'}{c^2 a(1-e^2)}. \qquad (97,7)$$

Далее, рассмотрим путь светового луча в центрально-симметрическом гравитационном поле. Этот путь определяется уравнением эйконала (85,10)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

отличающимся от уравнения Гамильтона-Якоби только тем, что в последнем надо положить $m = 0$. Поэтому для траектории луча мы можем сразу написать, полагая в (97,4) $m = 0$:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2M^2} - \frac{e^\nu}{r^2}}} \qquad (97,8)$$

$\left(\right.$вместо энергии частицы $\mathscr{E}_0 = -\frac{\partial S}{\partial t}$ мы пишем теперь частоту света $\left.\omega_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$.

Для исследования этой траектории, как и в предыдущем случае, напишем (97,8) в виде дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2M^2} - \sigma^2 + \frac{2km'}{c^2}\sigma^3$$

или, дифференцируя по φ и вводя опять постоянную $\alpha = 3km'/c^2$:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \alpha\sigma^2. \qquad (97,9)$$

Пренебрегая малым членом αc^2, находим в нулевом приближении

$$\sigma = \frac{\cos\varphi}{R}$$

(мы обозначили $R = \omega_0/cM$), т. е. прямую $r = \frac{R}{\cos\varphi}$, проходящую на расстоянии R от начала координат. Для определения следующего

---

[1]) Численные значения смещения, определяемого формулой (97,7), для Меркурия и Земли равны соответственно 43,0″ и 3,8″ в сто лет. Астрономические измерения дают значения 42,6″ ± 0,9″ и 4,6″ ± 2,7″, в прекрасном согласии с теорией.

приближения подставляем в (97,9) $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$. Тогда для σ_1 мы находим уравнение:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\alpha\sigma_0^2=\frac{\alpha}{R^2}\cos^2\varphi.$$

Частный интеграл этого уравнения есть $\sigma_1=\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi)$ и, следовательно, для траектории луча мы получаем уравнение:

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi). \tag{97,10}$$

Определим направление этой кривой на больших расстояниях от центра. Для этого полагаем $r=\infty$, или $\sigma=0$, и из полученного таким образом уравнения ищем φ в виде $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi$ с малым $\Delta\varphi$ [имея в виду, что в (97,10) второй член справа мал]. Это даёт с точностью до величин высшего порядка

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi=\pm\frac{2\alpha}{3R}.$$

Таким образом, траектория луча представляет собой кривую с асимптотами, угол между которыми равен

$$\Delta\varphi=\frac{4\alpha}{3R}=\frac{4km'}{c^2R}. \tag{97,11}$$

Луч света, проходящий через центрально-симметрическое гравитационное поле на расстоянии R от центра, испытывает, следовательно, отклонение, определяемое этой формулой [1]).

§ 98. Псевдотензор энергии-импульса

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением (31,4) $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k}=0$. Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение (93,6)

$$T^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(T^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl}=0. \tag{98,1}$$

[1]) Для луча, проходящего мимо края солнца, $\Delta\varphi=1{,}75''$.

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было[1]). Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной лишь материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем; последний же не учтён в выражении для T_i^k.

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нём материей мы поступим следующим образом[2]). Выберем систему координат таким образом, чтобы в некоторой заданной точке пространства-времени все первые производные от g_{ik} по координатам обратились в нуль (сами же g_{ik} при этом не должны обязательно иметь галилеевы значения). Тогда в этой точке второй член в уравнении (98,1) обратится в нуль, а в первом можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, так что остаётся

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0,$$

или в контравариантных компонентах

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Величины T^{ik}, тождественно удовлетворяющие этому уравнению, могут быть написаны в виде

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl},$$

где η^{ikl} — величины, антисимметричные по индексам k, l:

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

---

[1]) Действительно, интеграл $\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k$ сохраняется лишь при выполнении условия $\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = 0$, а не (98,1). В этом легко убедиться, произведя в криволинейных координатах те же вычисления, которые были проделаны в § 28 в декартовых координатах. Достаточно, впрочем, просто заметить, что эти вычисления имеют чисто формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин, как и доказательство теоремы Гаусса, имеющей в криволинейных координатах тот же вид (81,19), что и в декартовых.

[2]) Может возникнуть мысль применить к гравитационному полю формулу (93,3), подставив в неё $\Lambda = \frac{c^4}{16\pi k} G$. Подчеркнём, однако, что эта формула относится только к физическим системам, описывающимся величинами q, отличными от g_{ik}; поэтому она не применима к гравитационному полю, определяющемуся самими величинами g_{ik}. Заметим, кстати, что при подстановке в (93,3) G вместо Λ мы получили бы просто нуль; как это непосредственно видно из соотношения (94,3) и уравнений поля в пустоте.

Нетрудно фактически привести T^{ik} к такому виду. Для этого исходим из уравнений поля:

$$T^{ik}=\frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right),$$

а для R^{ik} имеем согласно (91,4):

$$R^{ik}=\frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m\partial x^n}+\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l\partial x^n}\right\}$$

(напоминаем, что в рассматриваемой точке все $\Gamma^i_{kl}=0$). После простых преобразований тензор T^{ik} может быть приведён к виду

$$T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km}\right)\right]\right\}.$$

Стоящее в фигурных скобках выражение антисимметрично по индексам k, l и есть то, что мы обозначили выше как η^{ikl}. Поскольку первые производные от g_{ik} в рассматриваемой точке равны нулю, то множитель $1/(-g)$ можно вынести из-под знака производной $\frac{\partial}{\partial x^l}$. Вводим обозначение

$$h^{ikl}=\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km}\right)\right]; \tag{98,2}$$

эти величины антисимметричны по индексам kl:

$$h^{ikl}=-h^{ilk}. \tag{98,3}$$

Тогда можно написать

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}=(-g)\,T^{ik}.$$

Это соотношение, выведенное в предположении $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=0$, перестаёт иметь место при переходе к произвольной системе координат. В общем случае разность $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}-(-g)T^{ik}$ отлична от нуля; обозначим её посредством $(-g)\,t^{ik}$. Тогда будем иметь, по определению:

$$(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \tag{98,4}$$

Величины t^{ik} симметричны по индексам i, k:

$$t^{ik}=t^{ki}. \tag{98,5}$$

Это видно непосредственно из их определения, поскольку как тензор T^{ik}, так и производные $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ являются симметричными величинами [1]). Выражая T^{ik} через R^{ik}, согласно уравнениям гравитации, и воспользовавшись выражением (98,2) для h^{ikl}, можно получить после довольно длинного вычисления, которое мы не станем приводить здесь, следующее выражение для t^{ik}:

$$t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\Big\{(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np}-\Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn}-\Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})+$$
$$+g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np})+$$
$$+g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np})+$$
$$+g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\Big\}. \qquad (98,6)$$

Существенным свойством величин t^{ik} является то, что они не составляют тензора; в этом можно сразу убедиться, замечая, что в $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ стоят простые, а не ковариантные производные. Однако t^{ik} выражаются через величины Γ^i_{kl}, а последние ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям координат (см. § 83); то же самое относится, следовательно, и к t^{ik}.

Из определения (98,4) следует, что для суммы $T^{ik}+t^{ik}$ тождественно выполняются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik}+t^{ik})=0. \qquad (98,7)$$

Это значит, что имеет место закон сохранения величин

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{ik}+t^{ik})\,dS_k. \qquad (98,8)$$

В отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах $t^{ik}=0$, и написанный интеграл переходит в $\frac{1}{c}\int T^{ik}dS_k$, т. е. в 4-импульс материи. Поэтому величины (98,8) должны быть отождествлены с полным 4-импульсом материи вместе с гравитационным полем. Совокупность величин t^{ik} называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля.

Интегрирование в (98,8) может производиться по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя всё трёхмерное пространство (см. §§ 28, 31). Если выбрать в качестве неё гиперповерх-

[1]) Именно для этого мы вынесли выше $(-g)$ из-под знака производной по x^l в выражении для T^{ik}. В противном случае $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$, а потому и t^{ik} оказались бы несимметричными по i, k.

ность $x^0 = \text{const.}$, то P^i можно написать в виде трёхмерного пространственного интеграла:

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)\,(T^{i0} + t^{i0})\,dV. \tag{98,9}$$

Как обычно, величину $(-g)(T^{00} + t^{i0})$ можно назвать «плотностью» полной энергии материи и поля, а величины $\frac{1}{c}(-g)(T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0})$ — компонентами плотности полного импульса. Последние (умноженные на c^2) представляют собой в то же время компоненты плотности потока энергии, а $(-g)(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta})$ — компоненты плотности потока импульса. В отсутствии материи $T^{ik} = 0$, так что плотность энергии гравитационного поля представится в виде $(-g)\,t^{00}$, а плотность импульса — в виде $\frac{1}{c}(-g)\,T^{0\alpha}$.

Тот факт, что полный 4-импульс материи и поля выражается в виде интегралов от симметричных по индексам i, k величин $(-g)(T^{ik} + t^{ik})$, весьма существен. Он означает, что имеет место закон сохранения момента импульса, определяемого как (см. § 31):

$$\begin{aligned} M^{ik} &= \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \\ &= \int \{x^i (T^{kl} + t^{kl}) - x^k (T^{il} + t^{il})\}\,(-g)\,dS_l. \end{aligned} \tag{98,10}$$

Таким образом, в гравитационном поле продолжает иметь место закон сохранения полного момента импульса [1]).

Выбирая систему координат, галилееву в данном элементе объёма, можно обратить все t^{ik} в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ^i_{kl}). С другой стороны, можно получить отличные от нуля t^{ik} в эвклидовом пространстве, т. е. в отсутствии гравитационного поля, если просто пользоваться криволинейными координатами вместо декартовых. Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определённой локализации энергии гравитационного поля в пространстве. Если тензор $T_{ik} = 0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место и в любой другой системе отсчёта, так что мы можем сказать, что

---

[1]) Необходимо отметить, что полученное нами выражение для 4-импульса материи и поля отнюдь не является единственно возможным. Напротив, можно бесчисленным числом способов (см., например, задачу к этому параграфу) подобрать такие выражения, которые бы в отсутствии поля переходили в T^{ik}, а при интегрировании по dS_k давали бы сохраняющиеся величины. Хотя эти интегралы, т. е. полные энергия и импульс материи и поля, являются при этом, разумеется, одинаковыми, но «распределения плотности» энергии и импульса по пространству различны. Однако сделанный нами выбор — единственный, при котором псевдотензор энергии-импульса поля оказывается симметричным и потому даёт возможность сформулировать закон сохранения момента импульса (такое же положение мы, по существу, имели уже в § 31).

в этой точке нет материи или электромагнитного поля. Напротив, из равенства нулю псевдотензора в некоторой точке в одной системе отсчёта отнюдь не следует того же самого для другой системы отсчёта, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется или нет гравитационная энергия в данном месте. Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором координат можно «уничтожить» гравитационное поле в данном элементе объёма, причём согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t^{ik} в этом элементе.

Величины же P^i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определённый смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчёта как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений. Выделим вокруг рассматриваемых масс область пространства, настолько большую, чтобы вне её можно было считать гравитационное поле отсутствующим. В четырёхмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает «канал». Вне этого «канала» поле отсутствует, так что 4-пространство — плоское. В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо, очевидно, выбрать четырёхмерную систему координат таким образом, чтобы вне «канала» она переходила в галилееву систему и все t^{ik} исчезали бы. Этим требованием система отсчёта, конечно, отнюдь не определяется однозначно, — внутри канала она может быть ещё выбрана произвольно. В полном согласии с физическим смыслом величин P^i они оказываются, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри «канала». Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри «канала», но переходящие вне его в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P^i и P'^i в этих двух системах в определённые моменты «времени» x^0 и x'^0. Введём третью систему координат, совпадающую внутри «канала» в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 — со второй, а вне «канала» — с той же галилеевой. Но в силу закона сохранения энергии и импульса величины P^i постоянны $\left(\frac{\partial P^i}{\partial x^0}=0\right)$. Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух. Отсюда следует $P^i=P'^k$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t^{ik} являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат. Поэтому P^i образуют вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца. Подставляя (98,4) в (98,8), находим

$$P^i=\frac{1}{c}\int\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}dS_k=\frac{1}{2c}\int\left(dS_k\frac{\partial}{\partial x^l}-dS_l\frac{\partial}{\partial x^k}\right)h^{ikl}.$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6,12):

$$P^i=\frac{1}{c}\oint h^{ikl}df^*_{kl}. \tag{98,11}$$

Если в качестве поверхности интегрирования в (98,8) выбирается гиперповерхность $x^0 = \mathrm{const.}$, то в (98,11) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной обычной поверхностью[1]). Таким образом, мы находим выражение для 4-импульса материи и гравитационного поля в некоторой области трёхмерного пространства в виде интеграла по поверхности, охватывающей этот объём

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha}\, df_\alpha. \tag{98,12}$$

При применении этой формулы для вычисления полного 4-импульса материи и поля надо иметь в виду, что, в соответствии со сказанным выше, система пространственных координат должна быть выбрана таким образом, чтобы на бесконечности, где пространство эвклидово, она переходила бы в декартову систему.

Применяя формулу (98,12) к изолированной системе тел, постоянно находящейся вблизи начала координат, мы можем выбрать достаточно удалённую от тел поверхность интегрирования, на которой гравитационное поле определяется выражением (96,14) для интервала. Вычисление приводит к результату

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc, \tag{98,13}$$

где m — полная масса системы, — результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжёлой» и «инертной» масс («тяжёлой» массой называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле, — это есть та масса, которая входит в выражение для интервала в гравитационном поле, или, в частности, в закон Ньютона; «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой его массе, умноженной на c^2).

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей. Получить это выражение можно, например, исходя из

[1]) $d\overset{*}{f}_{kl}$ есть «нормальный» элемент поверхности, связанный с «тангенциальным» элементом df^{ik} посредством (6,9): $d\overset{*}{f}_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm}\, df^{lm}$. На поверхности, охватывающей гиперповерхность, перпендикулярную к оси x^0, отличны от нуля только компоненты df^{lm} с $l, m = 1, 2, 3$, и, следовательно, $d\overset{*}{f}_{ik}$ имеет только компоненты с одним из i или k, равным 0. Компоненты $d\overset{*}{f}_{0\alpha}$ являются не чем иным, как компонентами трёхмерного элемента обычной поверхности, который мы обозначаем просто посредством df_α.

следующего тождества, справедливого, как легко проверить, когда все величины не зависят от x^0 [1]):

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha\right).$$

Интегрируя $R_0^0 \sqrt{-g}$ по (трёхмерному) пространству и применив трёхмерную теорему Гаусса, получим

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha\, df_\alpha.$$

Взяв достаточно удалённую поверхность интегрирования и воспользовавшись на ней выражениями для g_{ik}, даваемыми формулой (96,14), получим после простого вычисления

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = -\frac{4\pi k}{c^2} m,$$

т. е. написанный интеграл равен $-\frac{4\pi k}{c^3} P^0$. Замечая также, что согласно уравнениям поля

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right) = \frac{4\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right),$$

получаем искомую формулу

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int \left(T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_0^0\right) \sqrt{-g}\, dV. \qquad (98,14)$$

Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля (т. е. полную массу тела) через тензор энергии-импульса одной только материи (Р. Толмен, 1930). Напомним, что в случае центральной симметрии поля мы имели для той же величины ещё и другое выражение — формулу (96,17).

---

[1]) Из (91,10) имеем

$$R_0^0 = g^{0i} R_{i0} = g^{0i} \left(\frac{\partial \Gamma_{i0}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{i0}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{0m}^l\right),$$

а с помощью (84,5) и (84,8) находим, что это выражение может быть написано как

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g} \cdot g^{0i} \Gamma_{i0}^l\right) + g^{im} \Gamma_{ml}^0 \Gamma_{i0}^l;$$

с помощью того же соотношения (84,8) легко убедиться в том, что второй член справа тождественно равен $-\frac{1}{2} \Gamma_{lm}^0 \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$, и вследствие независимости всех величин от x^0 обращается в нуль. Наконец, заменив по той же причине в первом члене суммирование по l суммированием по α, получим приведённую в тексте формулу.

Задача

Получить выражение для полного 4-импульса материи и гравитационного поля, воспользовавшись формулой (31,5).

Решение. В криволинейных координатах имеем вместо (31,1) $S=\int\Lambda\sqrt{-g}\,dV\,dt$ и потому для получения сохраняющейся величины надо писать в (31,5) $\Lambda\sqrt{-g}$ вместо Λ, так что 4-импульс имеет вид

$$P_i=\frac{1}{c}\int\left\{\Lambda\sqrt{-g}\cdot\delta_i^k-\sum\frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i}\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial\frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}}\right\}dS_k.$$

При применении этой формулы к материи, для которой величины $q^{(l)}$ отличны от g_{ik}, можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, и подинтегральное выражение оказывается равным $\sqrt{-g}\,T_i^k$, где T_i^k — тензор энергии-импульса материи. При применении же написанной формулы к гравитационному полю надо положить $\Lambda=\frac{c^4}{16\pi k}G$, а величинами $q^{(l)}$ являются компоненты g_{ik} метрического тензора. Полный 4-импульс поля и материи равен, следовательно,

$$P_i=\frac{1}{c}\int T_i^k\sqrt{-g}\,dS_k+\frac{c^3}{16\pi k}\int\left[G\sqrt{-g}\,\delta_i^k-\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}}\right]dS_k.$$

Воспользовавшись выражением (92,3) для G, можно преобразовать эту формулу к виду:

$$P_i=\frac{1}{c}\int\left\{T_i^k\sqrt{-g}+\frac{c^4}{16\pi k}\left[G\sqrt{-g}\,\delta_i^k+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Gamma_{lm}^k\frac{\partial(g^{lm}\sqrt{-g})}{\partial x^i}-\Gamma_{ml}^l\frac{\partial(g^{mk}\sqrt{-g})}{\partial x^i}\right]\right\}dS_k.$$

Второй член в фигурных скобках определяет 4-импульс гравитационного поля в отсутствии материи. Подинтегральное выражение не симметрично по индексам i, k и потому не даёт возможности сформулировать закон сохранения момента импульса.

§ 99. Гравитационные волны

Рассмотрим слабое гравитационное поле в пустоте. В слабом поле метрика пространства-времени «почти эвклидова», т. е. можно выбрать такую систему отсчёта, в которой компоненты метрического тензора g_{ik} почти равны своим галилеевым значениям, которые мы обозначим посредством

$$g_{\alpha\beta}^{(0)}=-\delta_{\alpha\beta},\quad g_{\alpha 0}^{(0)}=0,\quad g_{00}=-1. \tag{99,1}$$

Мы можем, следовательно, написать g_{ik} в виде

$$g_{ik}=g_{ik}^{(0)}+h_{ik}, \tag{99,2}$$

где h_{ik} — малая поправка, определяющая гравитационное поле.

При малых h_{ik} компоненты Γ^i_{kl}, выражающиеся через производные от g_{ik}, тоже малы. Пренебрегая степенями h_{ik} выше первой, мы можем оставить в тензоре R_{iklm} (91,4) только члены в первой скобке:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right). \tag{99,3}$$

Для упрощённого тензора R_{ik} имеем с той же точностью

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}\approx g^{(0)lm}R_{limk},$$

или

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(-g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}+\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right), \tag{99,4}$$

где $h^k_i=g^{(0)lk}h_{il}$, $h=h^i_i$.

Мы выбрали систему отсчёта таким образом, чтобы g_{ik} мало отличались от $g^{(0)}_{ik}$. Но это условие сохраняется и при любом бесконечно малом преобразовании координат, так что мы можем наложить на h_{ik} ещё четыре (по числу координат) условия, не нарушая при этом их малости.

Выберем в качестве этих дополнительных условий уравнения[1])

$$\frac{\partial \psi^k_i}{\partial x^k}=0, \quad \psi^k_i=h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h. \tag{99,5}$$

Тогда последние три члена в R_{ik} взаимно сокращаются, и мы находим

$$R_{ik}=-\frac{1}{2}g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Таким образом, уравнения (94,7) гравитационного поля в пустоте приобретают вид

$$\Box h^k_i=0, \tag{99,6}$$

---

[1]) Если искать преобразование, приводящее к h^k_i, удовлетворяющим этим условиям, в виде $x'^i=x^i+\xi^i$ (ξ^i — малые того же порядка, что и h^k_i), то легко убедиться в том, что функции ξ^i этого преобразования должны удовлетворять уравнениям

$$\Box \xi_i=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h\right),$$

где $\xi_i=g^{(0)}_{ik}\xi^k$. Отсюда видно, в частности, что система координат, удовлетворяющая условию (99,5), может ещё быть подвергнута любому малому преобразованию $x'^i=x^i+\xi^i$, где для ξ^i имеет место уравнение $\Box\xi_i=0$. Кроме того, система координат может, очевидно, быть подвергнута любому преобразованию Лоренца.

где $\square$ есть оператор д'Аламбера:

$$\square = -g^{(0)lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Это — обычное волновое уравнение. Таким образом, гравитационные поля, как и электромагнитные, распространяются в пустоте со скоростью света.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну. В такой волне поле меняется только вдоль одного направления в пространстве; в качестве этого направления мы выберем ось $x^1 = x$. Уравнения (99,6) тогда превращаются в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{99,7}$$

решением которых является любая функция от $x \pm ct$ (§ 45).

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси X. Все величины h_i^k в ней являются функциями от $x - ct$. Дополнительные условия (99,5) дают в этом случае $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t. Эти равенства можно проинтегрировать, просто вычеркнув знак дифференцирования, — постоянные интегрирования можно положить равными нулю, так как мы интересуемся здесь (как и в случае электромагнитных волн) только переменной частью поля. Таким образом, между отдельными компонентами ψ_i^k имеются соотношения:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{99,8}$$

Как было отмечено в сноске на стр. 337, условия (99,5) ещё не определяют однозначно системы отсчёта. Именно мы можем ещё подвергнуть координаты преобразованию вида $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$; такое преобразование не нарушает условий (99,5), так как ξ^i удовлетворяют уравнению $\square \xi_i = 0$ (см. ту же сноску). Этими преобразованиями можно воспользоватся для того, чтобы обратить в нуль четыре величины: ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$; из равенств (99,8) следует, что при этом обратятся в нуль также и компоненты ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Что же касается остающихся величин ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, то их нельзя обратить в нуль никаким выбором системы отсчёта, поскольку, как легко убедиться, при преобразовании $x'^i = x^i + \xi^i(x - ct)$ эти компоненты вообще не меняются. Заметим, что таким образом обращается в нуль и $\psi = \psi_i^i$, а потому $\psi_i^k = h_i^k$.

Таким образом, плоская гравитационная волна определяется двумя величинами, а именно h_{23}, $h_{22} - h_{33}$. Другими словами, гравитационные волны являются поперечными волнами, поляризация которых определяется симметричным тензором 2-го ранга в плоскости YZ, сумма диагональных членов которого $h_{22} + h_{33}$ равна нулю.

Гравитационные волны обладают некоторой энергией, «плотность» которой равна $(-g)t^{00}$. Как и всякая энергия, она в свою очередь создаёт некоторое гравитационное поле. Таким образом, гравитационная волна сама создаёт вокруг себя некоторое дополнительное гравитационное поле. Это поле — более высокого (второго) порядка малости по сравнению с полем самой волны, поскольку создающая её энергия второго порядка [производные $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ первого порядка по h_{ik}, а потому согласно (93,6) t^{ik} — второго порядка].

Вычислим поток энергии в плоской гравитационной волне. Мы видели в предыдущем параграфе, что поток энергии гравитационного поля определяется величинами $ct^{0\alpha}(-g)$. В волне, распространяющейся вдоль оси x^1, очевидно, отлична от нуля только компонента t^{10}.

Как было указано, псевдотензор t^{ik} второго порядка малости; мы должны вычислить t^{10} только с этой точностью. Вычисление с помощью общей формулы (98,6) с использованием того факта, что в плоской волне отличны от нуля только компоненты h_{23}, $h_{22}=-h_{33}$ тензора h_{ik}, приводит к результату:

$$t^{01}=-\frac{c^4}{32\pi k}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\frac{\partial h_{22}}{\partial t}+\frac{\partial h_{33}}{\partial x}\frac{\partial h_{33}}{\partial t}+2\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\right).$$

Если все величины являются функциями только от $x-ct$, то отсюда окончательно получаем

$$t^{01}=\frac{c^3}{32\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2+\frac{1}{4}(\dot{h}_{22}-\dot{h}_{33})^2\right]. \qquad (99,9)$$

§ 100. Слабое гравитационное поле

Рассмотрим, далее, слабое гравитационное поле, создаваемое произвольными телами, движущимися со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Благодаря наличию материи уравнения гравитационного поля будут отличаться от простого волнового уравнения вида $\Box h_i^k=0$ (99,6) наличием в правой стороне равенства членов, происходящих от тензора энергии-импульса материи. Мы напишем эти уравнения в виде

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k=-\frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \qquad (100,1)$$

где мы ввели вместо h_i^k более удобные для этого случая величины $\psi_i^k=h_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k h$, а τ_i^k обозначает дополнительные выражения, получающиеся при переходе в точных уравнениях $R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R=\frac{8\pi k}{c^4}T_i^k$ к случаю слабых полей в рассматриваемом приближении. Легко убедиться в том, что компоненты τ_0^0 и τ_α^0 получаются непосредственно из соответствующих компонент T_i^k посредством выделения из них величин интересующего нас порядка малости; что же касается компонент τ_β^α, то они содержат наряду с членами, получающимися из T_β^α, также и члены второго порядка малости из $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$.

Величины ψ_i^k удовлетворяют условию (99,5), $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0$. Из (100,1) следует, что такое же уравнение имеет место и для τ_i^k:

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{100,2}$$

Это уравнение заменяет здесь общее соотношение $T_{i;k}^k = 0$.

Определим прежде всего метрику пространства-времени в слабом гравитационном поле на не слишком больших расстояниях от создающей поле системы тел (расстояния, большие по сравнению с размерами системы a, но малые по сравнению с длиной излучаемых системой гравитационных волн, $\lambda \sim a\frac{c}{v}$). В первом приближении можно пренебречь в уравнениях (100,1) членами с производными по времени $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi_i^k}{\partial t^2}\right)$, содержащими $\frac{1}{c^2}$, а из всех компонент τ_i^k можно считать отличным от нуля только компоненту $\tau_0^0 = -\mu c^2$ [см. (95,1)], содержащую c^2 (между тем как остальные содержат первую или вторую степени скоростей тел). Тогда получим уравнения

$$\Delta\psi_\alpha^\beta = 0, \quad \Delta\psi_0^\alpha = 0, \quad \Delta\psi_0^0 = \frac{16\pi k}{c^2}\mu. \tag{100,3}$$

Мы должны искать решения этих уравнений, обращающиеся на бесконечности в нуль (галилеева метрика). Поэтому из первых двух уравнений следует, что $\psi_\alpha^\beta = 0$, $\psi_0^\alpha = 0$. Сравнивая же третье уравнение с уравнением (95,2) для ньютоновского гравитационного потенциала φ, найдём $\psi_0^0 = \frac{4\varphi}{c^2}$. Отсюда находим для компонент тензора $h_i^k = \psi_i^k - \frac{1}{2}\psi\delta_i^k$ следующие значения:

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \quad h_0^\alpha = 0, \quad h_0^0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \tag{100,4}$$

или для интервала:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{100,5}$$

Второй член здесь определяет пространственную метрику в слабом гравитационном (ньютоновском) поле.

Мы видим, что поправочные члены первого порядка по φ имеются не только в g_{00}, но и в $g_{\alpha\beta}$; в § 86 было уже указано, что в уравнениях движения частицы (со скоростью $v \ll c$) поправочные члены в $g_{\alpha\beta}$ приводят к величинам более высоких порядков малости, чем члены, происходящие от g_{00}; в связи с этим в § 86 мы смогли определить только h_{00}.

Что касается смешанных компонент g_0^α метрического тензора, то в рассматриваемом приближении они остались равными нулю. В следующем приближении имеем для определения величин $g_0^\alpha = h_0^\alpha = \psi_0^\alpha$ уравнение

$$\Delta g_{\alpha 0} = -\frac{16\pi k}{c^4}\tau_{\alpha 0}.$$

Подставляем сюда $\tau_{\alpha 0} = \mu c^2 u_0 u_\alpha \cong -\mu c v_\alpha$, где $\mathbf{v}$ — обычная трёхмерная скорость, и вводим трёхмерный вектор $\mathbf{g}$ с компонентами $g_\alpha = -\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \cong g_{\alpha 0}$; тогда получаем уравнение

$$\Delta \mathbf{g} = \frac{16\pi k}{c^3}\mu\mathbf{v}. \tag{100,6}$$

На больших (по сравнению с размерами тел) расстояниях его решение может быть написано непосредственно по аналогии с решением (43,3) уравнения (42,2):

$$\mathbf{g} = -\frac{2k}{c^3 R_0^3}[\mathbf{M}\mathbf{R}_0], \tag{100,7}$$

где $\mathbf{M} = \int [\mathbf{r}\cdot\mu\mathbf{v}]\,dV$ — момент импульса тел [1]).

В задаче 1 к § 88 было показано, что в гравитационном поле с отличными от нуля $g_{0\alpha}$ на частицу действует «кориолисова сила», такая же, которая действовала бы на частицу, находящуюся на теле, вращающемся с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{h}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$. Поэтому мы можем сказать, что в гравитационном поле, создаваемом вращающимся телом (с моментом импульса M), на частицу действует сила, эквивалентная кориолисовой силе, появляющаяся при вращении с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} \cong \frac{c}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g} = \frac{k}{c^2 R_0^5}\left[R_0^2\mathbf{M} - 3\mathbf{R}_0(\mathbf{M}\mathbf{R}_0)\right]$$

$$[h \cong 1,\ \mathbf{g}\ \text{из}\ (100,7)].$$

---

[1]) Если вычислять полный момент гравитационного поля и материи по общей формуле (98,10) с $g_{0\alpha}$ из (100,7), то получится как раз величина **M**. Это показывает, что формула (100,7) правильно определяет $g_{0\alpha}$ вдали от тел даже в том случае, когда вблизи тел гравитационное поле нельзя считать слабым; при этом, однако, M есть момент импульса не одних только тел, а тел вместе с гравитационным полем (если поле везде слабо, то его моментом можно пренебречь).

ЗАДАЧА

Определить действие для гравитационного поля в ньютоновском приближении.

Решение. С помощью g_{ik} из (100,5) вычисляем по общей формуле (92,3): $G = -\frac{4}{c^2}(\nabla\varphi)^2$, так что действие для поля:

$$S_g = -\frac{1}{4\pi k}\int (\nabla\varphi)^2\, dV\, dt.$$

Полное действие для поля вместе с массами, распределёнными в пространстве с плотностью μ:

$$S = \int\int\left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{4\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV\, dt.$$

Легко убедиться в том, что варьирование S по φ приводит к уравнению Пуассона (95,2).

§ 101. Излучение гравитационных волн

Вычисление энергии, излучаемой движущимися телами в виде гравитационных волн, требует определения гравитационного поля в «волновой зоне», т. е. на расстояниях, больших по сравнению с длиной излучаемых волн.

Все вычисления принципиально вполне аналогичны тем, которые мы производили для электромагнитных волн. Уравнения (100,1) слабого гравитационного поля по форме совпадают с уравнением запаздывающих потенциалов (§ 62). Поэтому их общее решение можно сразу написать в виде

$$\psi_i^k = \frac{4k}{c^4}\int (\tau_i^k)_{t-\frac{R}{c}} \frac{dV}{R}. \tag{101,1}$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях от системы можно написать (см. §§ 66 и 67):

$$\psi_i^k = \frac{4k}{c^4 R_0}\int (\tau_i^k)_{t-\frac{R_0}{c}} dV, \tag{101,2}$$

где R_0 — расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы; индекс $t - \frac{R_0}{c}$ в подинтегральных выражениях мы будем ниже для краткости опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся уравнениями (100,2). Опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты, пишем (100,2) в виде

$$\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \tag{101,3}$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{\alpha 0}x^\beta dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma}x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta}\, dV.$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik}=0$, то первый интеграл правой части, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Взяв полусумму оставшегося равенства и его же с переставленными индексами, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)\, dV.$$

Далее, умножим второе из уравнений (101,3) на $x^\alpha x^\beta$ и опять проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta\, dV = -\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)\, dV.$$

Сравнивая оба полученных результата, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta\, dV. \qquad (101,4)$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}. Но эта компонента равна в данном приближении (как было указано в § 100) просто соответствующей компоненте T_{00} тензора T_{ik}.

$$\tau_{00} = -\overset{0}{\tau_0} = \mu c^2.$$

Подставляя это в (101,4) и вводя время $t = x^0/c$, находим (101,2) в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta dV. \qquad (101,5)$$

На больших расстояниях от системы зарядов можно рассматривать волну (в небольших участках пространства) как плоскую. Поэтому можно вычислить поток энергии, излучаемой системой, скажем, в направлении оси x^1, воспользовавшись формулой (99,9).

В формулу (99,9) входят компоненты $h_{23}=\psi_{23}$ и $h_{22}-h_{33} = \psi_{22}-\psi_{33}$. Из (101,5) находим для них выражения

$$h_{23} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\ddot{D}_{23}, \quad h_{22}-h_{33} = -\frac{2k}{c^4 R_0}(\ddot{D}_{22}-\ddot{D}_{33})$$

(точка означает дифференцирование по времени), где мы ввели тензор

$$D_{\alpha\beta}=\int\mu\,(3x^{\alpha}x^{\beta}-\delta_{\alpha\beta}x_{\gamma}^{2})\,dV, \qquad (101,6)$$

«квадрупольного момента» масс (см. § 95). В результате мы получаем поток энергии вдоль оси x^1 в виде

$$t^{10}=\frac{k}{4\pi c^{5}R_{0}^{2}}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22}-\dddot{D}_{33}}{2}\right)^{2}+\dddot{D}_{23}^{2}\right]. \qquad (101,7)$$

Зная излучение в направлении оси x^1, легко определить излучение в произвольном направлении, единичный вектор вдоль которого обозначим посредством $\mathbf{n}$. Для этого надо составить из компонент тензора $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ и вектора n_α скаляр, квадратичный по $\dddot{D}_{\alpha\beta}$, который при $n_1=1$, $n_2=n_3=0$ переходил бы в $\dddot{D}_{23}^{2}+\left(\frac{\dddot{D}_{22}-\dddot{D}_{33}}{2}\right)^{2}$.

В результате интенсивность излучения энергии в элемент телесного угла do оказывается равной

$$dI=\frac{k}{4\pi c^{5}}\left[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta})^{2}+\frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}^{2}-\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}n_{\beta}n_{\gamma}\right]do. \qquad (101,8)$$

Полное излучение по всем направлениям, т. е. потерю энергии системой в единицу времени $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)$, можно найти, усредняя этот поток по направлениям и умножая полученное среднее значение на 4π. Усреднение легко производится с помощью формул, приведённых в сноске к стр. 218. Это усреднение приводит к следующему выражению для потери энергии:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt}=\frac{k}{5c^{5}}\dddot{D}_{\alpha\beta}^{2}. \qquad (101,9)$$

Необходимо отметить, что численное значение этой потери энергии, даже для астрономических объектов, настолько мало, что его влияние на движение, даже за космические промежутки времени, совершенно ничтожно (так, для двойных звёзд потеря энергии в год оказывается порядка 10^{-12}-й части их полной энергии).

Выражение на $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ содержит $\frac{1}{c^5}$. Это значит, что потеря энергии изолированной системой появляется только в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырёх приближениях энергия системы остаётся постоянной. Отсюда следует, что система тел в гравитационном поле может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка v^4/c^4, в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует только с точностью до членов второго порядка (последнее связано с тем, что потеря энергии путём электромагнитного излучения содержит $1/c^8$). Эффекты, вызываемые этими дополнительными членами в функции Лагранжа, однако, совершенно ничтожны [1]).

Задача

Два тела, притягивающихся по закону Ньютона, движутся по круговым орбитам (вокруг их общего центра инерции). Определить скорость сближения обоих тел, обусловленную потерей энергии излучением гравитационных волн.

Решение. Если m_1, m_2 — массы тел, а r — их взаимное расстояние (постоянное при движении по круговым орбитам), то вычисление с помощью (101,9) даёт:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{32k}{5c^5}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2 r^4\omega^6,$$

где $\omega=2\pi/T$, T — период обращения. Частота ω связана с r посредством $\omega^2r^3=k(m_1+m_2)$. Поскольку $\mathscr{E}=-k\frac{m_1m_2}{2r}$, то $\dot{r}=-\frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathscr{E}}{dt}$, и мы получим окончательно

$$\dot{r}=-\frac{64k^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5r^3}.$$

§ 102. Изотропное пространство

Применим уравнения гравитации к пространству, которое на всём своём протяжении полностью однородно и изотропно. Это значит, что можно выбрать такое «мировое» время, чтобы в каждый данный его момент метрика пространства была одинаковой во всех точках и по всем направлениям. Другими словами, пространство обладает полной симметрией. При этом, конечно, автоматически предполагается, что плотность материи (в каждый данный момент «мирового» времени) постоянна вдоль всего пространства [2]).

---

[1]) Приведём без вывода выражение функции Лагранжа во втором приближении для системы гравитационным образом взаимодействующих друг с другом частиц:

$$L=\sum_A\frac{m_Av_A^2}{2}\left(1-3\sum_{B\neq A}\frac{km_B}{c^2R_{AB}}\right)+\sum_A\frac{m_Av_A^4}{8c^2}+\sum_{A\neq B}\frac{km_Am_B}{2R_{AB}}+$$
$$+\sum_{\substack{A\neq B\\A\neq C}}\frac{k^2m_Am_Bm_C}{2c^2R_{AB}R_{AC}}+\sum_{A\neq B}\frac{km_Am_B}{2c^2R_{AB}}(7\mathbf{v}_A\mathbf{v}_A+\mathbf{v}_A\mathbf{n}_{AB}\cdot\mathbf{v}_B\mathbf{n}_{AB}),$$

где $\mathbf{n}_{AB}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора $\mathbf{R}_{AB}$ между частицами m_A и m_B.

[2]) Если применять получающиеся ниже результаты, то речь должна итти о свойствах пространства, рассматриваемого в «большом масштабе», отвлекаясь от «местных» неоднородностей, вызванных скоплением материи в звёзды и звёздные системы (так называемые внегалактические туманности или галактики). Так, под плотностью масс должна подразумеваться плотность,

Прежде всего построим пространственную метрику изотропного пространства в определённый момент «мирового» времени. Другими словами, мы должны найти выражение для элемента пространственного расстояния dl через дифференциалы координат, т. е. определить компоненты тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ в общем выражении

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{102,1}$$

Трёхмерный метрический тензор мы обозначаем посредством $\gamma_{\alpha\beta}$ в отличие от четырёхмерного тензора g_{ik}.

Кривизна пространства полностью определяется его трёхмерным тензором кривизны, который мы будем обозначать как $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ в отличие от четырёхмерного тензора R^i_{klm} (свойства тензора $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, конечно, в точности аналогичны свойствам тензора R^i_{klm}). В случае полной изотропии тензор $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ должен, очевидно, выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$. Легко видеть, что в силу свойств симметрии $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ (см. § 91) он должен, следовательно, иметь вид:

$$P^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \lambda \left(\delta^\alpha_\gamma \gamma_{\delta\beta} - \delta^\alpha_\delta \gamma_{\gamma\beta}\right), \tag{102,2}$$

где λ есть некоторая постоянная. Тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta} = P^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ равен соответственно

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{102,3}$$

а скалярная кривизна

$$P = 6\lambda. \tag{102,4}$$

Таким образом, мы видим, что свойства кривизны изотропного пространства определяются всего одной постоянной λ. Соответственно этому возможны всего три существенно различные случая пространственной метрики: 1) так называемое пространство постоянной положительной кривизны (соответствующее положительным значениям λ), 2) пространство постоянной отрицательной кривизны (соответствующее значениям $\lambda < 0$) и 3) пространство с кривизной, равной нулю ($\lambda = 0$). Из них последнее представляет собой плоское, т. е. эвклидово пространство.

При изучении метрики удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая геометрию изотропного трёхмерного пространства

усреднённая по областям пространства, размеры которых велики по сравнению с расстояниями между туманностями.

Хотя имеющиеся в настоящее время астрономические данные дают основания для предположения об однородности такой плотности, однако это предположение неизбежно может иметь лишь приближённый характер, и остаётся открытым вопрос о том, не может ли это обстоятельство изменить даже качественно получаемые результаты и насколько совпадают с действительностью даже существенные свойства получающихся таким образом решений уравнений гравитации.

как геометрию на заведомо изотропной гиперповерхности (в некотором фиктивном четырёхмерном пространстве[1]). Такой поверхностью является гиперсфера; соответствующее ей трёхмерное пространство и является пространством положительной постоянной кривизны. Уравнение гиперсферы с радиусом a в четырёхмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=a^2,$$

а элемент длины на ней выражается как

$$dl^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2.$$

Рассматривая координаты x^1, x^2, x^3 как три пространственные координаты и исключая из dl^2 фиктивную координату x^4 с помощью первого уравнения, находим элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2}{a^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}. \qquad (102,5)$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ в (102,2). Поскольку нам заранее известно, что $P_{\alpha\beta}$ имеет вид (102,3) во всём пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где $\gamma_{\alpha\beta}$ равны:

$$\gamma_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$, а значит и величины $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ в начале координат обращаются в нуль, то вычисление по общей формуле (91,10) оказывается очень простым и даёт в результате

$$\lambda=\frac{1}{a^2}. \qquad (102,6)$$

Величину a можно назвать «радиусом кривизны» пространства. Введём вместо координат x^1, x^2, x^3 соответствующие им «сферические» координаты r, θ, φ. Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2=\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{a^2}}+r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2+d\theta^2). \qquad (102,7)$$

Начало координат может быть, конечно, выбрано в любой точке пространства. Длина окружности в этих координатах равна $2\pi r$, а поверхность сферы равна $4\pi r^2$. Длина же «радиуса» окружности

---

[1]) Не имеющем, разумеется, ничего общего с четырёхмерным пространством-временем.

(или сферы) равна $\int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$, т. е. больше r. Таким образом, отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше чем 2π.

Другую удобную форму dl^2 имеет в «четырёхмерных сферических координатах», получающихся, если ввести вместо координаты r «угол» χ согласно $r = a\sin\chi$ (χ меняется в пределах от 0 до 2π)[1]). Тогда

$$dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2)\right]. \qquad (102,8)$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2\sin^2\chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы увеличивается, пока не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения, равного $4\pi a^2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться, пока не превратится в точку на «противоположном полюсе» пространства на расстоянии πa — наибольшем расстоянии, которое вообще может существовать в таком пространстве [всё это видно, конечно, и из (102,7), если заметить, что координата r не может принимать значений, бо́льших чем a].

Объём пространства с положительной кривизной равен согласно (102,8):

$$V = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi} a^3\sin^2\chi\sin\theta\,d\chi\,d\theta\,d\varphi,$$

откуда

$$V = 2\pi^2 a^3. \qquad (102,9)$$

Таким образом, пространство положительной кривизны оказывается «замкнутым само в себе» — конечным, но, разумеется, не имеющим границ.

Интересно отметить, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд равен нулю. Действительно, всякая замкнутая поверхность в конечном пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные же области пространства. Поэтому поток электрического поля через эту поверхность равен, с одной стороны, полному заряду, находящемуся внутри поверхности, а с другой, — равен находящемуся вне её заряду, взятому с обратным знаком. Сумма же зарядов с обеих сторон поверхности равна, следовательно, нулю.

---

[1]) «Декартовы» координаты x_1, x_2, x_3, x_4 связаны с четырёхмерными сферическими координатами a, θ, φ, χ посредством соотношений:

$$x_1 = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi,$$
$$x_3 = a\sin\chi\cos\theta. \qquad x_4 = a\cos\chi.$$

Перейдём теперь к рассмотрению геометрии пространства, обладающего постоянной отрицательной кривизной. Из (102,7) мы видим, что постоянная λ делается отрицательной, если a^2 отрицательно, т. е. a мнимо. Поэтому все формулы для пространства отрицательной кривизны можно непосредственно получить из предыдущих, заменив в них a на ia. Другими словами, геометрия пространства отрицательной кривизны получается математически как геометрия на четырёхмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

Таким образом, постоянная λ равна теперь

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \tag{102,10}$$

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ имеет вид:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2), \tag{102,11}$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞. Отношение длины окружности к радиусу теперь больше чем 2π. Выражение для dl^2, соответствующее (102,8), получится, если ввести координату χ согласно $r = a\,\mathrm{sh}\,\chi$ (χ меняется здесь от 0 до ∞). Тогда

$$dl^2 = a^2\{d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\,(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \tag{102,12}$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2\chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объём пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.

Задача

Преобразовать элемент длины (102,7) к виду, в котором он был бы пропорционален своему эвклидову выражению.

Решение. Подстановка

$$r = \frac{r_1}{1 + r_1^2/4a^2}$$

приводит к результату:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2}(dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2\theta\cdot d\varphi^2).$$

§ 103. Пространственно-временная метрика закрытой изотропной модели

Переходя к исследованию пространственно-временной изотропной метрики[1]), мы должны прежде всего произвести выбор системы отсчёта. Наиболее удобной является система, движущаяся в каждой

[1]) Рассматриваемые в этом и следующем параграфах решения уравнений гравитации были впервые найдены А. Фридманом (1922).

точке пространства вместе с веществом, находящимся в этой же точке. Можно сказать, что системой отсчёта является сама заполняющая пространство материя; скорость вещества в этой системе, по определению, равна везде нулю («собственная» система отсчёта). Очевидно, что такой выбор системы отсчёта для изотропной модели является разумным, — при другом выборе направленность скоростей материи создавала бы кажущуюся неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всём пространстве была одинаковой.

Ввиду полной эквивалентности всех направлений, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора в выбранной нами системе отсчёта равны нулю. Действительно, три компоненты $g_{0\alpha}$ можно рассматривать как компоненты трёхмерного вектора, который, будучи отличен от нуля, создавал бы неравноценность различных направлений. Таким образом, ds^2 должны иметь вид $ds^2 = -g_{00}dx_0^2 - dl^2$. Компонента g_{00} является здесь функцией только от x^0. Поэтому можно всегда выбрать временную координату так, чтобы g_{00} обратилось в $-c^2$. Обозначая её посредством τ, имеем:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \qquad (103,1)$$

Такое время τ является, очевидно, собственным временем в каждой точке пространства.

Начнём с рассмотрения пространства положительной кривизны; ниже мы будем для краткости говорить о соответствующем решении уравнений гравитации как о «закрытой модели». Для dl воспользуемся выражением (102,8), в котором «радиус кривизны» a является, вообще говоря, функцией времени. Таким образом, ds^2 пишем в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau)\left\{d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\right\}. \qquad (103,2)$$

Функция $a(\tau)$ определяется уравнениями гравитационного поля. Для решения этих уравнений удобно воспользоваться, вместо времени, величиной η, определяемой соотношением

$$c\,d\tau = a\,d\eta. \qquad (103,3)$$

Тогда ds^2 напишется в виде:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left\{d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\right\}. \qquad (103,4)$$

Для составления уравнений поля надо начать с вычисления компонент тензора R_{ik} (координатами x^0, x^1, x^2, x^3 являются η, χ, θ, φ). Из соображений симметрии можно заранее заключить, что компоненты $R_{0\alpha}$ обращаются тождественно в нуль. Далее, замечаем, что из числа величин Γ^i_{kl} компоненты вида Γ^α_{00} и $\Gamma^0_{0\alpha}$, как легко убедиться, обращаются в нуль. Поэтому в выражении для R_{00} остаются только следующие члены:

$$R_{00} = -\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\ln\sqrt{-g} - \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{0\alpha} + \frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial\eta}.$$

Что касается компонент $R_{\alpha\beta}$, то для упрощения их вычисления замечаем, что поскольку $g_{0\alpha} = 0$, то компоненты трёхмерного тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ совпадают с компонентами $g_{\alpha\beta}$. Поэтому, выделяя из $R_{\alpha\beta}$ те члены, которые содержат только $g_{\alpha\beta}$, мы получим компоненты трёхмерного тензора $P_{\alpha\beta}$. Таким образом, найдём

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \frac{\partial\Gamma^0_{\alpha\beta}}{\partial\eta} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial\eta} - \Gamma^0_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta 0} - \Gamma^0_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha 0}.$$

С помощью значений компонент метрического тензора из (103,4)

$$g_{00} = -a^2, \quad g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2\sin^2\chi, \quad g_{33} = a^2\sin^2\chi\sin^2\theta$$

вычисляем нужные нам из величин Γ^i_{kl}:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot a}{a}, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{\dot a}{a^3}g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^{\alpha}_{0\beta} = \frac{\dot a}{a}\delta^{\alpha}_{\beta}$$

(точка означает дифференцирование по η). Тензор же $P_{\alpha\beta}$ равен согласно (102,3) и (102,6):

$$P_{\alpha\beta} = \frac{2}{a^2}g_{\alpha\beta}.$$

Наконец, с помощью всех этих выражений получим после простого вычисления:

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = -\frac{3}{a^4}(\dot a^2 + a^2).$$

Это надо приравнять величине $\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0$; поскольку в выбранной нами системе отсчёта материя неподвижна, то $u^{\alpha} = 0$, $u^0 = 1/a$, и из (93,8) имеем $T^0_0 = -\varepsilon$ (ε есть плотность энергии материи).

Таким образом, получаем следующее уравнение[1]):

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(\dot a^2 + a^2). \qquad (103,5)$$

Сюда входят две неизвестные функции ε и a; поэтому необходимо получить ещё одно уравнение. В качестве такового удобно выбрать (вместо пространственных компонент уравнений поля) уравнение $T^i_{0;i} = 0$ — одно из четырёх уравнений (98,1), содержащихся, как

---

[1]) Мы не рассматриваем вовсе уравнений с так называемой космологической постоянной, поскольку в настоящее время окончательно выяснилось, что нет никаких физических оснований для такого видоизменения уравнений тяготения.

мы знаем, в уравнениях гравитации. Это уравнение можно вывести и непосредственно с помощью термодинамических соотношений следующим образом.

Пользуясь в уравнениях поля выражением (93,8) для тензора энергии-импульса, мы тем самым пренебрегаем всеми процессами диссипации энергии, приводящими к возрастанию энтропии. Такое пренебрежение, разумеется, здесь вполне законно, поскольку дополнительные члены, которые надо было бы прибавить к T_i^k в связи с диссипацией энергии, ничтожно малы по сравнению с плотностью энергии ε, включающей в себя энергию покоя материальных тел.

Таким образом, при выводе уравнений поля мы можем считать полную энтропию постоянной. Воспользуемся теперь известным термодинамическим соотношением $d\mathscr{E} = TdS - pdV$, где $\mathscr{E}$, S, V — энергия, энтропия и объём системы, а p, T — давление и температура. При постоянной энтропии имеем просто $d\mathscr{E} = -pdV$. Вводя плотность энергии $\varepsilon = \mathscr{E}/V$, без труда находим

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p)\frac{dV}{V}.$$

Объём пространства V пропорционален, согласно (102,9), кубу радиуса кривизны a. Поэтому $dV/V = 3da/a = 3d\ln a$, и мы можем написать

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3d(\ln a),$$

или, интегрируя:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const}. \tag{103,6}$$

(нижний предел в интеграле постоянен) [1]).

Если связь между ε и p («уравнение состояния» материи) известна, то уравнение (103,6) определяет ε как функцию от a. Тогда из (103,5) мы можем определить η в виде

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2 - 1}}. \tag{103,7}$$

Уравнения (103,6) и (103,7) решают в общем виде задачу об определении метрики в изотропной закрытой модели.

Если материя распределена в пространстве в виде отдельных макроскопических тел, то при определении создаваемого ею гравитационного поля мы можем рассматривать эти тела как материальные частицы, обладающие определёнными массами, не интересуясь вовсе их внутренним строением. Считая скорости тел сравнительно малыми

[1]) Обратим внимание на то, что уравнение (103,6) совпадает с уравнением (8), полученным в задаче 4, § 96 путём интегрирования уравнения $T^i_{0;i} = 0$ в «собственной» системе отсчёта.

(малыми по сравнению с c), можно положить просто $\varepsilon=\mu c^2$, где μ — сумма масс тел, отнесённая к единице объёма. По той же причине давление «газа», состоящего из этих тел, крайне мало по сравнению с ε, и им можно пренебречь (давления же внутри тел, согласно сказанному, не имеют отношения к рассматриваемому вопросу). Что касается имеющегося в пространстве излучения, то его количество относительно мало, и его энергией и давлением тоже можно пренебречь.

Полагая в (103,6) $\varepsilon=\mu c^2$, $p=0$ и производя интегрирование, получим

$$\mu a^3 = \text{const}. \tag{103,8}$$

Это уравнение можно было бы написать непосредственно, так как оно выражает собой просто тот факт, что сумма масс тел во всём пространстве остаётся постоянной, как и должно было быть в рассматриваемом случае (очевидно, что $\text{const.} = M/2\pi^2$, где $M=\mu V$ есть полная масса в пространстве объёма $V=2\pi^2 a^3$). Подставляя (103,8) в уравнение (103,7) и производя интегрирование, получим

$$a = a_0(1-\cos\eta), \tag{103,9}$$

где $a_0=\dfrac{2kM}{3\pi c^2}$ — постоянная. Наконец, для связи между τ и η находим из (103,3)

$$\tau = \frac{a_0}{c}(\eta-\sin\eta). \tag{103,10}$$

Уравнения (103,9) и (103,10) определяют в параметрическом виде функцию $a(\tau)$; кривая, изображающая эту зависимость, есть циклоида.

При $\eta=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ a обращается в нуль, а μ соответственно в бесконечность. Но при $\mu\to\infty$ давление тоже становится большим, и поэтому для исследования метрики при значениях η, близких к указанным, надо рассмотреть противоположный предельный случай наибольшего возможного (при данной плотности энергии) давления. В § 34 мы видели, что максимальное давление равно $p=\varepsilon/3$ [см. (34,5)]. Подставляя это в формулу (103,6), получим

$$\varepsilon a^4 = \text{const.}, \tag{103,11}$$

после чего (103,7) и (103,3) приводят к соотношениям:

$$a = a_0'\sin\eta, \qquad \tau = \frac{a_0'}{c}(1-\cos\eta), \tag{103,12}$$

где постоянная a_0' связана определённым образом с постоянной в (103,11). Поскольку это решение имеет смысл рассматривать только при очень малых значениях a, то мы можем сразу написать соответствующую приближённую формулу (получающуюся разложением в ряд при $\eta\ll 1$):

$$a = \text{const.}\sqrt{\tau}. \tag{103,13}$$

При изменении знака τ величина a в (103,12) сделалась бы мнимой, а её квадрат — отрицательным. Все четыре компоненты g_{ik} в (103,2) были бы при этом отрицательными, а детерминант g — положительным. Но такая метрика физически бессмысленна (см. стр. 259). Это значит, что при указанных выше значениях η метрика действительно имеет особые точки. Поэтому надо рассматривать значения η только в интервале от 0 до 2π (или, что то же самое, от 2π до 4π и т. п.), и не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за границы указанного интервала.

§ 104. Пространственно-временная метрика открытой изотропной модели

Решение, соответствующее изотропному пространству отрицательной кривизны («открытая модель»), получается способом, совершенно аналогичным предыдущему. Вместо (103,2) имеем теперь

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau)\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\cdot d\varphi^2)\}. \quad (104,1)$$

Вводим снова вместо τ переменную η согласно $c\,d\tau = a\,d\eta$; тогда получаем

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\cdot d\varphi^2)\}. \quad (104,2)$$

Это выражение может быть формально получено из (103,4) заменой η, χ, a соответственно на $i\eta$, $i\chi$, ia. Поэтому и уравнения поля можно получить непосредственно путём этой же подстановки в (103,5) и (103,6). Уравнение (103,6) сохраняет при этом свой прежний вид:

$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{const.}, \quad (104,3)$$

а вместо (103,5) имеем

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(\dot{a}^2 - a^2). \quad (104,4)$$

Соответственно этому находим вместо (103,7)

$$\eta = \pm\int\frac{da}{a\sqrt{\dfrac{8\pi k}{c^4}\varepsilon a^2 + 1}}. \quad (104,5)$$

Рассмотрим сначала случай малых давлений. Полагая $p = 0$, $\varepsilon = \mu c^2$, находим следующие окончательные формулы:

$$a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1),\quad \tau = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta),$$
$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k}a_0. \quad (104,6)$$

Первые две определяют в параметрическом виде функцию $a(\tau)$.

При $\eta=0$ радиус кривизны $a(\eta)$ обращается в нуль, а μ — в бесконечность (постоянные интегрирования выбраны в (104,5) таким образом, чтобы этому значению соответствовало $\tau=0$). В противоположность решению (103,8) — (103,10), это имеет здесь место только для одного значения η. Вблизи $\eta=0$ найденное решение не применимо, и мы должны опять обратиться к случаю $p=\varepsilon/3$. Из (104,3) имеем попрежнему

$$\varepsilon a^4 = \text{const.}, \tag{104,7}$$

а для зависимости a от τ находим

$$a = a_0' \operatorname{sh}\eta, \quad \tau = \frac{a_0'}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1)$$

при малых η, когда только и имеет смысл рассматривать это решение, имеем опять

$$a = \text{const.}\,\sqrt{\tau}. \tag{104,8}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае метрика имеет особую точку при $\eta=0$; поэтому надо рассматривать все функции только при значениях $\eta>0$ или только при $\eta<0$.

При $\eta>0$ радиус кривизны монотонно возрастает с τ. Подчеркнём, что возрастание радиуса кривизны приводит к возрастанию вообще всех расстояний в пространстве, как это непосредственно видно уже из того обстоятельства, что элемент пространственного расстояния (102,12) пропорционален a. Это приводит к тому, что в таком пространстве тела «разбегаются» друг от друга. С точки зрения наблюдателя, который находился бы на одном из них, дело выглядело бы так, как если бы все остальные двигались в радиальных направлениях, удаляясь от наблюдателя[1]).

Наконец, предельным случаем рассмотренных решений, соответствующим бесконечному радиусу кривизны пространства, является модель с плоским (эвклидовым) пространством. Интервал ds^2 в соответствующем пространстве-времени можно написать в виде:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - b^2(\tau)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{104,9}$$

(в качестве пространственных координат выбраны «декартовы» координаты x, y, z). Зависящий от времени множитель в элементе пространственного расстояния не меняет, очевидно, эвклидовости

[1]) Для того чтобы сделать заключение о «разбегании» тел, необходимо, чтобы непосредственное взаимодействие этих тел было достаточно слабо; точнее — потенциальная энергия взаимодействия тел должна быть мала по сравнению с кинетической энергией их движения при «разбегании» (для достаточно удалённых тел это условие во всяком случае выполнено). В противном случае взаимные расстояния тел определяются в основном их взаимодействием; поэтому, например, должны оставаться постоянными размеры отдельных макроскопических тел.

пространственной метрики, так как при заданном τ этот множитель постоянен и простым преобразованием координат может быть приведён к единице. Вычисления, аналогичные произведённым в предыдущем параграфе, приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon=\frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{d\tau}\right)^2,\qquad 3\ln b=-\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+\mathrm{const.}$$

Для случая малых давлений находим

$$\mu b^3=\mathrm{const.},\qquad b=\mathrm{const.}\,\tau^{2/3}. \tag{104,10}$$

При малых τ опять надо рассматривать случай $p=\varepsilon/3$, при котором получаем

$$\varepsilon b^4=\mathrm{const.},\qquad b=\mathrm{const.}\sqrt{\tau}. \tag{104,11}$$

Таким образом, и в этом случае метрика имеет особую точку ($\tau=0$).

Все рассмотренные нами модели с изотропным пространством оказываются обладающими общим свойством — их метрики имеют особые точки. Необходимо, однако, иметь в виду, что лишь более полное исследование уравнений поля в общем случае неизотропного пространства могло бы ответить на вопрос о том, насколько указанное свойство этих решений не является специальным свойством изотропной модели, не имеющим места в реальном случае, когда пространственная изотропия может быть только приближённой.

Сделаем здесь ещё несколько замечаний, касающихся результатов применения термодинамики в общей теории относительности.

Мы видели в § 98, что закон сохранения полного 4-импульса в общей теории относительности приобретает характер тождества. В частности, полный 4-импульс P^i во всём пространстве оказывается равным нулю. Это следует непосредственно из выражения (98,12) 4-импульса в виде интеграла по поверхности $P^i=\frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha}df_\alpha$. Действительно, в конечной модели всякая замкнутая поверхность с обеих своих сторон охватывает конечную область пространства. Поэтому указанный интеграл равен полному 4-импульсу, заключённому в пространстве с одной стороны поверхности и в то же время взятому с обратным знаком 4-импульсу в пространстве, находящемся с другой её стороны. Полный же 4-импульс во всём пространстве, вычисленный по формуле (98,9), равен, следовательно, нулю.

Таким образом, определение полного 4-импульса во всём пространстве по формуле (98,9), по существу, не имеет смысла, поскольку соответствующий закон сохранения вырождается в бессодержательное тождество $0=0$.

В нерелятивистской термодинамике энтропия всякой замкнутой системы монотонно возрастает, достигая через достаточный промежуток времени своего максимального значения, соответствующего состоянию термодинамического равновесия. Это значение является максимальным, которое энтропия может иметь при данных постоянных значениях импульса и энергии системы.

В релятивистской термодинамике закон монотонного возрастания энтропии замкнутых систем попрежнему имеет место. Однако, ввиду указанной особенности законов сохранения, утверждение, что при этом возрастании энтропия принимает в конце концов наибольшее возможное при данных энергии и импульсе значение, в применении к миру как целому теряет теперь смысл. Таким образом, энтропия мира систематически возрастает без того, однако, чтобы мир переходил в какое-либо состояние равновесия, обладающее максимальной энтропией.

Задача

Преобразовать интервал ds в открытой модели при больших τ к центрально-симметричному виду (96,2).

Решение. При $\eta \gg 1$ имеем из (104,5) $a \cong c\tau$, так что интервал (104,2) приобретает вид

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - c^2 d\tau^2 \{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\}.$$

Вводим новую координату r согласно

$$r = c\tau \operatorname{sh}\chi,$$

так, чтобы коэффициент при $d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2$ стал равным r^2. Написав, далее,

$$c^2 (d\tau^2 - \tau^2 d\chi^2) = \frac{(c^2\tau d\tau + r dr)^2}{c^2\tau^2 + r^2} - dr^2,$$

полагаем

$$\frac{c^2\tau d\tau + r dr}{\sqrt{c^2\tau^2 + r^2}} = c\,dt,$$

откуда

$$t = \sqrt{\tau^2 + \frac{r^2}{c^2}} = \tau \operatorname{ch}\chi.$$

В переменных r, θ, φ, t интервал принимает, следовательно, вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).$$

Этот результат показывает, что при больших τ метрика открытой модели становится, в первом приближении, галилеевой. В системе отсчёта r, θ, φ, t, однако, материя не неподвижна, и её распределение не однородно; при этом распределение и движение материи оказываются центрально-симметричными вокруг произвольной точки пространства, выбранной в качестве начала координат. В системе χ, θ, φ, τ каждой данной материальной частице соответствуют определённые постоянные значения χ, θ, φ. Поэтому радиальная скорость частицы v в системе r, θ, φ, t равна $v = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_\chi = c\operatorname{th}\chi$ или

$v = r/t$. Она увеличивается с расстоянием пропорционально r. Для определения распределения плотности материи замечаем, что в системе χ, θ, φ количество материи, заключённой в сферическом слое «толщины» $d\chi$, имеет вид $\text{const.}\,\text{sh}^2\chi\cdot d\chi$. Но $\text{sh}^2\chi\cdot d\chi = \frac{ctr^2dr}{(c^2t^2-r^2)^2}$ и разделив на объём $4\pi r^2dr$ сферического слоя в координатах r, θ, φ, найдём, что распределение материи имеет вид

$$\text{const.}\frac{t}{(c^2t^2-r^2)^2}.$$

Все полученные формулы, выведенные в предположении $\eta \gg 1$, становятся неприменимыми при r, близких к ct (при малых $ct - r$ мало τ).

§ 105. Распространение света

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Для этого проще всего воспользоваться тем, что вдоль мировой линии распространения светового сигнала интервал $ds = 0$. Точку, из которой выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, φ. Из соображений симметрии очевидно, что лучи будут распространяться «радиально», т. е. вдоль линий $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ Полагая соответственно этому в (103,4) или (104,2) $d\theta = d\varphi = 0$, получим $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$. Приравнивая нулю, находим $d\eta = \pm d\chi$ или, интегрируя:

$$\chi = \pm\eta + \text{const.} \tag{105,1}$$

Знак плюс перед η соответствует лучу, распространяющемуся по направлению от начала координат, а знак минус — лучу, приходящему в начало координат. В таком виде уравнение (105,1) применимо к распространению лучей как в открытой, так и в закрытой моделях. С помощью формул предыдущих параграфов можно выразить отсюда проходимое лучом расстояние как функцию времени.

В открытой модели луч света, вышедший из некоторой точки, по мере своего распространения неограниченно удаляется от неё. В закрытой же модели вышедший из исходной точки луч света в конце концов может дойти до «противоположного полюса» пространства (чему соответствует изменение χ от 0 до π); при дальнейшем распространении луч начнёт приближаться к исходной точке. Обходу луча «вокруг пространства» и возвращению в исходную точку соответствовало бы изменение χ от 0 до 2π. Из (105,1) мы видим, что при этом и η должно было бы измениться на 2π, что, однако, невозможно (за исключением одного случая — выхода луча в момент, соответствующий $\eta = 0$). Таким образом, луч не мог бы возвратиться в исходную точку, обойдя «вокруг пространства».

Лучу, приходящему в точку наблюдения (начало координат), соответствует уравнение (105,1) со знаком минус перед η. Если момент прихода луча в эту точку есть $\tau(\eta_0)$, то при $\eta=\eta_0$ должно быть $\chi=0$, так что уравнение распространения таких лучей имеет вид

$$\chi=\eta_0-\eta. \tag{105,2}$$

Отсюда видно, что к наблюдателю, находящемуся в точке $\chi=0$, могут дойти к моменту времени $\tau(\eta_0)$ лучи, вышедшие из точек, находящихся на «расстояниях», не превышающих $\chi=\eta_0$.

Этот результат, относящийся как к открытой, так и к закрытой моделям, весьма существен. Мы видим, что в каждый момент времени $\tau(\eta)$ в данной точке пространства физическому наблюдению доступно не всё пространство, а лишь его часть, соответствующая $\chi\leqslant\eta$. С математической точки зрения, «видимая область» пространства представляет собой сечение четырёхмерного пространства-времени световым конусом. Это сечение оказывается конечным как для открытой, так и для закрытой моделей (бесконечным же в открытой модели является сечение гиперповерхностью $\tau=\text{const.}$, соответствующее пространству, рассматриваемому во всех своих точках в один и тот же момент времени τ). В этом смысле разница между открытой и закрытой моделями оказывается менее глубокой, чем это могло бы на первый взгляд показаться.

Чем более удалена от наблюдателя наблюдаемая им в данный момент времени область пространства, тем более ранним моментам времени она соответствует. Представим себе сферическую поверхность, являющуюся геометрическим местом точек, из которых свет вышел в момент времени $\tau(\eta-\chi)$ и наблюдается в начале координат в момент $\tau(\eta)$. Площадь этой поверхности равна $4\pi a^2(\eta-\chi)\,\mathrm{sh}^2\chi$ (в закрытой модели) или $4\pi a^2(\eta-\chi)\sin^2\eta$ (в открытой модели). По мере удаления от наблюдателя площадь «видимой сферы» сначала возрастает от нуля (при $\chi=0$), затем достигает максимума, после чего снова уменьшается, обращаясь в нуль при $\chi=\eta$ [где $a(\eta-\chi)=a(0)=0$]. Это значит, что сечение световым конусом не только конечно, но и замкнуто. Оно как бы замыкается в точке, «противоположной» наблюдателю; в этой точке $\varepsilon\to\infty$.

Полное наблюдаемое количество материи равно в открытой модели интегралу

$$M_{\text{набл}}=4\pi\int\limits_0^\eta \mu a^3\,\mathrm{sh}^2\chi\cdot d\chi.$$

Подставляя μa^3 из (104,6), получим

$$M_{\text{набл}}=\frac{3c^2a_0}{2k}(\mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{ch}\,\eta-\eta).$$

Эта величина неограниченно возрастает при $\eta\to\infty$. В закрытой же модели возрастание $M_{\text{набл}}$ ограничено, разумеется, полной массой M.

Рассмотрим теперь изменение частоты света при его распространении в изотропном пространстве. Для этого замечаем предварительно следующее обстоятельство. Пусть в некоторой точке пространства происходят два события, разделённые промежутком времени $d\tau = (1/c)\, a(\eta)\, d\eta$. Если в моменты этих событий отправляются световые сигналы, наблюдаемые в другой точке пространства, то между моментами их наблюдения пройдёт промежуток времени, соответствующий тому же изменению $d\eta$ величины η, что и в точке отправления. Это следует непосредственно из уравнения (105,1), согласно которому изменение величины η за время распространения луча света из одной точки в другую, зависит только от разности координат χ этих точек. Но поскольку за время распространения сигнала радиус кривизны a изменится, то промежутки времени τ между моментами отправления двух сигналов и моментами их наблюдения будут различными; отношение этих промежутков равно отношению соответствующих значений a.

Из приведённых рассуждений следует, в частности, что и периоды световых колебаний, измеренные в мировом времени τ, меняются вдоль луча пропорционально a. Частота же света будет, очевидно, обратно пропорциональна a. Таким образом, при распространении луча света вдоль него постоянно произведение

$$\omega a = \text{const}. \tag{105,3}$$

Предположим, что в момент времени $\tau(\eta)$ мы наблюдаем свет, излучённый источником, находящимся на расстоянии, соответствующем определённому значению координаты χ. Моментом испускания этого света является согласно (105,1) момент $\tau(\eta - \chi)$. Если ω_0 есть частота света в момент его испускания, то наблюдаемая нами частота ω равна согласно (105,3)

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{105,4}$$

При монотонно возрастающей функции $a(\eta)$ имеем $\omega < \omega_0$, т. е. происходит уменьшение частоты света. Это значит, что при наблюдении спектра приходящего света все его линии должны оказаться смещёнными в красную сторону по сравнению со спектрами тех же веществ в обычных условиях. Это явление представляет собой, по существу, эффект Допплера от взаимного «разбегания» тел.

Величина красного смещения, измеряемая, например, отношением ω/ω_0 сдвинутой частоты к несдвинутой, зависит (при данном моменте наблюдения) от расстояния, на котором находится наблюдаемый источник света [в соотношение (105,4) входит координата χ источника света]. При не слишком больших расстояниях можно разложить $a(\eta - \chi)$ в ряд по степеням χ, ограничившись первыми двумя членами:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}$$

(точка означает дифференцирование по η). Далее, замечаем, что произведение $\chi a(\eta)$ является здесь не чем иным, как расстоянием l до наблюдаемого источника. Действительно, «радиальный» элемент длины равен $dl = a d\chi$; при интегрировании этого соотношения возникает вопрос о том, каким способом физического наблюдения определяется расстояние, — в зависимости от этого надо брать значения a в разных точках пути интегрирования в разные моменты времени (интегрирование при $\eta = \text{const.}$ соответствовало бы одновременному рассмотрению всех точек пути, что физически не осуществимо). Но при «малых» расстояниях можно пренебречь изменением a вдоль пути интегрирования и написать просто $l = a\chi$ со значением a, взятым в момент наблюдения.

В результате находим для относительной величины изменения частоты следующую формулу:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\alpha l, \tag{105,5}$$

где введено обозначение

$$\alpha = \frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}. \tag{105,6}$$

Коэффициент α при l постоянен (для данного момента наблюдения). Таким образом, относительный сдвиг спектральных линий должен быть пропорционален расстоянию до наблюдаемого источника света.

Рассматривая красное смещение как результат эффекта Допплера, можно определить скорости v тел, с которым они удаляются от наблюдателя. Написав $(\omega - \omega_0)/\omega_0 = -v/c$ и сравнивая с (105,5), имеем

$$v = \alpha c l \tag{105,7}$$

(эту формулу можно получить и непосредственно вычисляя производную $v = \frac{d(a\chi)}{d\tau}$).

Если попытаться применить формулу (105,7) к экспериментальным данным, то для коэффициента получается значение

$$\alpha = 5{,}6 \cdot 10^{-26}\ \textit{см}^{-1}. \tag{105,8}$$

Это значение соответствует увеличению «скорости разбегания» на 160 *км/сек* на каждый миллион световых лет расстояния. Положительный знак α означает, что $\dot{a}(\eta) > 0$; в открытой модели этому соответствует $\eta > 0$, а в закрытой: $0 < \eta < \pi$.

Подставляя в уравнение (104,4) $\varepsilon = \mu c^2$ и $\alpha = \dot{a}/a^2$, получим для открытой модели следующее соотношение:

$$\frac{1}{a^2} = \alpha^2 - \frac{8\pi k}{3c^2}\mu. \tag{105,9}$$

Комбинируя это уравнение с равенством

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh}\eta}{a_0(\operatorname{ch}\eta - 1)} = \frac{1}{a}\operatorname{cth}\frac{\eta}{2},$$

получим

$$\operatorname{ch}\frac{\eta}{2} = \alpha\sqrt{\frac{3c^2}{8\pi k\mu}}. \tag{105,10}$$

Для закрытой модели вместо (105,9) получилось бы

$$\frac{1}{a^2} = \frac{8\pi k}{3c^2}\mu - \alpha^2. \tag{105,11}$$

Сравнивая (105,9) и (105,11), мы видим, что кривизна пространства отрицательна или положительна, смотря по тому, отрицательна или положительна разность $(8\pi k/3c^2)\mu - a^2$. Эта разность обращается в нуль при $\mu = \mu_k$, где

$$\mu_k = \frac{3a^2c^2}{8\pi k} = 6\cdot 10^{-28}\ г/см^3.$$

При современном состоянии астрономических сведений оценка средней плотности материи в пространстве может быть произведена лишь с весьма небольшой точностью и не даёт возможности определить даже знак разности $\mu - \mu_k$.

Отметим здесь некоторое неравенство, которое оказывается возможным получить при заданном значении величины α. Для открытой модели имеем $\alpha = \operatorname{sh}\eta/\alpha_0(\operatorname{ch}\eta - 1)^2$, и отсюда

$$c\tau = a_0(\operatorname{sh}\eta - \eta) = \frac{\operatorname{sh}\eta(\operatorname{sh}\eta - \eta)}{\alpha(\operatorname{ch}\eta - 1)^2}.$$

Поскольку $0 < \eta < \infty$, то должно быть

$$\frac{2}{3\alpha} < c\tau < \frac{1}{\alpha}. \tag{105,12}$$

Аналогично, для закрытой модели получим

$$c\tau = \frac{\sin\eta(\eta - \sin\eta)}{\alpha(1 - \cos\eta)^2}.$$

Возрастанию $a(\eta)$ соответствует интервал $0 < \eta < \pi$; поэтому получаем

$$0 < c\tau < 2/3\alpha. \tag{105,13}$$

В обоих случаях $c\tau < 1/\alpha = 2\cdot 10^9$ световых лет.

Далее, определим интенсивность I света, доходящего до наблюдателя от источника, находящегося на расстоянии, соответствующем определённому значению координаты χ. Плотность потока световой энергии в точке наблюдения обратно пропорциональна поверхности сферы, проведённой через рассматриваемую точку с центром в точке нахождения источника; в пространстве отрицательной кривизны площадь поверхности сферы равна $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2\chi$. Далее, свет, испущенный источником в течение времени $d\tau = \frac{1}{c} a(\eta - \chi)\, d\eta$, будет приходить в точку наблюдения в течение времени $d\tau \frac{a(\eta)}{a(\eta - \chi)} = \frac{1}{c} a(\eta)\, d\eta$. Поскольку интенсивность определяется как поток световой энергии в единицу времени, то, следовательно, в I появится множитель $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. Наконец, энергия волнового пакета пропорциональна частоте (см. (53,9)); поскольку частота меняется при распространении света по закону (105,3), то это приведёт к появлению в I ещё одного множителя $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. В результате окончательно получаем интенсивность в виде

$$I = \text{const} \cdot \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta) \operatorname{sh}^2\chi}. \tag{105,14}$$

Для закрытой модели получилось бы аналогично

$$I = \text{const} \cdot \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta) \sin^2\chi}. \tag{105,15}$$

Этими формулами устанавливается зависимость видимой яркости наблюдаемого объекта от его расстояния (при заданной абсолютной яркости). При малых χ можно положить $a(\eta - \chi) \cong a(\eta)$, и тогда $I \sim 1/a^2(\eta)\chi^2 = 1/l^2$, т. е. обычный закон уменьшения интенсивности обратно пропорционально квадрату расстояния.

Наконец, рассмотрим вопрос о так называемых собственных движениях тел. Говоря о плотности и движении материи, мы везде подразумевали усреднённую плотность и усреднённое движение; в частности, в той системе отсчёта, которой мы всё время пользуемся, скорость усреднённого движения равна нулю. Истинные же скорости тел обнаруживают некоторый разброс вокруг своего среднего значения. С течением времени скорости собственного движения тел меняются. Для определения закона этого изменения рассмотрим свободно движущееся тело и выберем начало координат в какой-либо точке его траектории. Тогда траекторией будет являться радиальная линия $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const}$. Уравнение Гамильтона-Якоби (85,7) после подстановки значений g^{ik} примет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + m^2c^2a^2(\eta) = 0. \tag{105,16}$$

Поскольку в коэффициенты этого уравнения χ не входит (т. е. координата χ циклична), то имеет место закон сохранения $\frac{\partial S}{\partial \chi} = \text{const}$. Импульс же p движущегося тела равен, по общему определению,

$p=\frac{\partial S}{\partial l}=\frac{\partial S}{a\partial\chi}$. Таким образом, при движении тела остаётся постоянным произведение

$$pa=\mathrm{const}. \tag{105,17}$$

Вводя скорость v собственного движения тела согласно

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

получим

$$\frac{va}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\mathrm{const}. \tag{105,18}$$

Этим соотношением определяется закон изменения скоростей v со временем. По мере возрастания a, скорости v монотонно падают.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
64	7 сн.	$\dot{I} =$	$I =$	Тип.
215	15 св.	$\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)$	$\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_1}\right)^2$	Авт.
227	5 св.	$x = r \sin \omega t$	$y = r \sin \omega t$	Ред.
247	18 сн.	$\dot{\mathbf{w}}$	$\mathbf{w}$	Тип.
270	14 сн.	$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$	$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$	»
286	7 св.	(22 4)	(22,5)	Авт.
303	7 сн.	$-g^{ik} \frac{\partial^l \Gamma^l_{il}}{\partial x^k}$	$-g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k}$	Тип.
305	3 св.	$g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \lvert g_{\alpha\beta} \rvert$	$g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \lvert g_{\alpha\beta} \rvert$	Ред.
310	5 св.	$g^{ik\delta} R_{ik}$	$g^{ik} \delta R_{ik}$	Кор.
325	12 св.	$e \left(\frac{\partial S}{c \partial t}\right)^2$	$e^{-\nu} \left(\frac{\partial S}{c \partial t}\right)^2$	Тип.
332	4 сз.	$(T^{00} + t^{i0})$	$(T^{00} + t^{00})$	Ред.
335	3 св.	$(\sqrt{} - g g^{i0} \Gamma^\alpha_{0i})$	$(\sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma^\alpha_{0i})$	Тип.

Заказ 433.